هندسه

برای مدارس متوسطه مطابق با مواد پروگرام متوسطه

جلد اول

در هندسهٔ مسطحه

تألیف میرزا رضا خان مهندس الملک

معلم ریاضیات عالیه

چاپ چهارم

طهران – ۱۳۴۰

اصول هندسه ۱

جلد اوّل

در هندسهٔ مسطّحه

برای مدارس متوسّطه

مطابق دستور تعلیمات متوسّطه

تألیف

میرزا رضا خان مهندس الملک معلّم و مؤلّف

ریاضیّات عالیه

چاپ ششم

(طهران)

سنه ۱۳۴۲

دستور تعلیمات متوسطه

سال اول

هندسه

خط مستقیم و سطح مستوی — زوایا — قرینه نسبت بیک محور — مثلث — مثلث متساوی الساقین — حالات تساوی دو مثلث — خطوط عمود — و مایل — مثلث قائم الزاویه — حالات تساوی دو مثلث قائم الزاویه — تعریف مکان هندسی — خطوط متوازیه — مجموع زوایای مثلث — وکثیر الاضلاع محدب — اشکال متوازی الاضلاع و مستطیل و مربع و لوزی — دایره — فصل مشترک خط و دایره — خط مماس بر دایره — قسی و اوتار — اوضاع نسبی دو دایره — اندازه و مقیاس زوایا — استعمال ستاره و گونیا و پرگار و نقاله — ترسیم زوایا و مثلث و خط عمود و متوازی — مسائل ترسیمی راجع بخط و دایره — ترسیم خطوط مماس بر یک دایره یا بر دو دایره

سال دوم

هندسه

نقاطیکه خط را بر نسب معینی قسمت میکنند — (تقسیم توافقی خط) — طولهای

متناسبه - هرخط موازی با یکی از اضلاع مثلث دو ضلع دیگر را بتناسب قطع میکند و
بالعکس - مثلثات متشابهه - حالات تشابه دو مثلث - خواص منصف الزوایای
مثلث - مطالب مختصر راجع بمجانست اشکال - اشکال متجانسه و متشابهه - پانتو
گراف - تعریف جیب وجیب تمام و ظل و ظل تمام یک زاویه - روابط متری
در مثلث قائم الزاویه - قضیه فیثاغورث - تعیین چهارم جزو متناسب -
ترسیم واسطه هندسی - تقسیم خط بر نسبت ذات وسط وطرفین - اشکال کثیر
الاضلاع منتظمه - محاط نمودن اشکال منتظمه در دایره - مربع و مسدس
و مثلث و متساوی الاضلاع و معشر و پانزده ضلعی - کثیر الاضلاع کوکبی -
دو کثیر الاضلاع منتظمه که هر یک عده اضلاع باشند متشابهند - نسبت محیط
دو کثیر الاضلاع متشابهه بیکدیگر - طول محیط دایره - نسبت محیط دایره بقطر -
محاسبه مقدار π (باید اکتفا کرد بعدهٔ محیط ها) - مساحت اشکال
کثیر الاضلاع (مستطیل و متوازی الاضلاع و مثلث و ذوذنقه و کثیر الاضلاع
غیر منتظم) نسبت محیط دو کثیر الاضلاع بیکدیگر - مساحت کثیر الاضلاع
محدب منتظم - مساحت دایره

بسم الله الرحمن الرحیم

هندسهٔ مسطحه

مقدمات اصلیه

ا- تعاریف

ا- حجم — هر جزء محدودی از فضا را حجم گویند مثلاً جزئی از فضا محصور مابین چهار دیوار و سقف و کف اطاق عبارتست از حجم

۲- جسم — در هندسه هر چیزی که جزء محدودی از فضا را متصرف باشد جسم نامند

۳- حجم هر جسم عبارت است از مکان متصرفی محدود آن جسم در فضاء مثلاً سنگ و میز و کتاب جزئی از فضا را متصرفند که آن را حجم گویند

۴- سطح — حد حجم هر جسم یعنی حدیکه جدا کند جسم را از فضاء محیطش سطح گویند

۵- خط — حد سطح یا محل تلاقی دو سطح را خط گویند

۶- نقطه — انتهای خط یا محل تلاقی دو خط را نقطه گویند

۷- حجم و سطح و خط و نقطه را عموماً شکل خوانند و آنها را قائم بالذات

و غیر متعلق با جسامی که منسوب بودند بآنها تصور میکنیم

۸- دو شکل را متساوی گویند وقتیکه در جمیع اجزاء درست بر یکدیگر منطبق شوند

۹- هرگاه فرض کنیم نقطه یا خط یا سطح بوسعت محدودی در فضا حرکت کند از حرکت نقطه خط تولید میشود و از حرکت خط سطح و از حرکت سطح حجم احداث میگردد

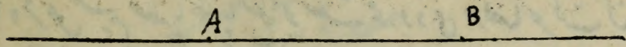
۱۰- خط مستقیم - خط مستقیم ساده ترین اقسام خطوط است و تصور آن را میتوان از یک نخ کشیده نمود

خط مستقیم دارای دو خاصیت است اولاً خط مستقیم اقصر فاصله است مابین دو نقطه ثانیاً مابین دو نقطه را نتوان وصل نمود جز یک خط مستقیم بعبارة اخری از دو نقطه مفروضه همواره وضع یک خط مستقیم مشخص میشود پس از این خاصیت اخیر چنین استنباط میشود که چون دو خط مستقیم در دو نقطه مشارک باشند در تمام امتدادشان بر یکدیگر منطبق میشوند بزرگترین که آنها را بینهایت امتداد دهیم و مابین بعد مخص اختصار خط مستقیم را مطلقاً خط گوئیم

۱۱- کلیه خطها را از هر دو طرف غیر محدود فرض میکنیم و آن را بدو حرف

که در دو تای از نقاطش نوشته شده باشد میخوانیم مثلاً گوئیم خط

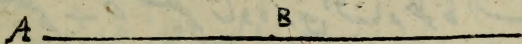
AB س ۱ [س ۱ علامت شکل یک است]



س ۱

و اگر خط از یک طرف بواسطهٔ نقطهٔ محدود باشد و از طرف دیگر غیر محدود

آنرا نیم خط گوئیم مانند نیم خط AB س ۲



س ۲

و هرگاه خط از هر دو طرف بدو نقطه محدود باشد آنرا قطعهٔ خط نامیم

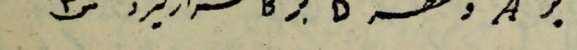
مانند قطعهٔ خط AB س ۳



۱۲ـ دو قطعهٔ خط AB و CD را متساوی گویند وقتیکه قابل انطباق

بر یکدیگر باشند یعنی بتوان قطعهٔ خط CD را چنان بر AB قرار داد

که نقطهٔ C بر A و نقطهٔ D بر B قرار گیرد س ۴



س ۴

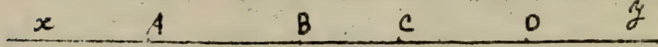
۱۳ـ هرگاه بر خط غیر محدود xy چند نقطهٔ A و B و C و D و...

فرض کنیم و جسم متحرکی ابتدا از A در روی این خط در یک جهت حرکت

کند گوئیم خط AC برابر است با مجموع طولهای AB و BC و همچنین طول

AD مساوی است با مجموع طولهای AB و BC و CD و بطور اختصار چنین مینویسیم

$AC = AB + BC$ و $AD = AB + BC + CD$



ش ۵

بنا براین بجهة جمع کردن چند قطعه خط کافی است که آنها را سراسر بدنبال یکدیگر در روی خط مستقیم نقل کنیم

۱۴- هرگاه طولی مساوی شود با مجموع دو طول دیگر گوئیم آن طول بزرگتر است از هرکدام از دو طول دیگر و اگر طول AL برابر باشد با مجموع m عده طول متساویه با AB گوئیم AL برابر است با m مرتبه طول AB و بالعکس AB یک جزو از m جزو AL است و چنین مینویسیم

$AL = m \cdot AB$ و $AB = \frac{1}{m} \cdot AL$

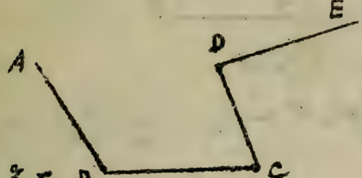
و بطور کلی هرگاه AB مساوی باشد با m مرتبه n ام جزو AC آنرا چنین مینویسیم

$$AB = \frac{m}{n} \cdot AC$$

پس از اینجا چنین استنباط میشود که طول دو قطعه خط را میتوان بیکدیگر سنجید و نسبت آنها را بدست آورد در صورتیکه ابتدا یک مقیاس مشترکی مابین آن دو طول معلوم نمائیم و ما عنقریب قاعدهٔ تعیین مقیاس مشترک مابین

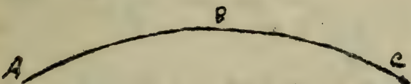
دو خط زاویه کوژ خواهیم داشت

۱۵- خط منکسر- خط منکسر خطی است مرکب از قطعات خطوط مستقیمه مانند خط منکسر ABCDE ش ۶



ش ۶

۱۶- خط منحنی- خط منحنی خطی است که نه مستقیم باشد نه منکسر مانند خط منحنی ABC ش ۷



ش ۷

مثلا سنگی که در هوا انداخته شود و همچنین گلوله توپ خط منحنی سیر میکند

۱۷- سطح مستوی- سطح مستوی ساده ترین جمیع اقسام سطوح است و آن سطحی است که چون خط مستقیم بر دو نقطه از آن عبور کند تمام این خط واقع شود بر آن سطح مثلاً سطح آب ساکن و صفحه آیینه صاف نمونه سطح مستوی میباشند و ما بعد هرجا سطح مطلق گوییم مقصود سطح مستوی است

۱۸- فایده هندسه- هندسه علمی است معرفت باحوال و خواص اشکال و آن بر دو قسم است: هندسه مسطحه و هندسه فضائیه
در هندسه مسطحه بحث میشود از اشکال مستویه یعنی از اشکالی که جمیع نقاط آن بر یک سطح مستوی واقع گردد و در هندسه فضائیه گفتگو کنیم از اشکالی که

تمام اجزاشان بر یک سطح مستوی واقع نشوند

۲ــ بعضی اصطلاحات و علامات مستعمله در هندسه

۱۹- حکم ــ حکم عبارتست از بیان یک فرض و یک مستنبط

۲۰- فرض ــ فرض یا مدعا قسمتی است از حکم و یا قرار دادی است که آن را محقق و مسلم قبول کنیم

۲۱- مستنبط ــ مستنبط یا نتیجه قسمتی است از حکم که پس از اقامهٔ دلیل و برهان محقق و واضح گردد

۲۲ــ هرگاه فرض و مستنبط حکمی را بر خلاف ترتیب مستنبط و فرض قرار دهیم حکم جدیدی عکس حکم اول تشکیل میگردد

مثال ــ حکم مستقیم ــ هرگاه دو جمله کسری نسبت بهم اول باشند (فرض) آن کسر غیر ممکن التحویل است (مستنبط) پس عکس حکم فوق چنین میشود هرگاه کسری غیر ممکن التحویل باشد (فرض) دو جمله آن نسبت بهم اول اند (مستنبط)

۲۳ــ هرگاه مخالف فرض و مستنبط حکمی را فرض و مستنبط قرار دهیم حکم جدیدی مخالف حکم اول تشکیل میگردد

متقابل معنی لغت حکم مستقیم مذکور چنین میشود چون دو جمله کسری نسبت بهم اول نباشند (فرض) آن کسر غیر ممکن التحویل نیست (مستنبط)

۲۴- هرگاه حکمی محقق باشد عکسش و خلافش ممکن است خطا باشد و اما اگر یکی از این دو حکم اخیر محقق باشد حکم دیگر نیز قهراً محقق خواهد بود و این عبارت را میتوان چنین ادا نمود هرگاه حکمی محقق باشد ممکن است عکسش و خلافش هردو محقق باشند و یا هردو خطا و در هندسه از اینده حالت امثله بسیار است

۲۵- قضیه- قضیه حکمی است محقق که واضح نشود مگر بعد از اقامه برهان

۲۶- اصول موضوعه- اصول موضوعه حکمی است محقق که مقدمه از برای تسهیل اثبات قضیه مقرر میداریم

۲۷- نتیجه- نتیجه حکمی است که مستقیماً از قضیه استنباط میشود

۲۸- مسئله- مسئله سؤالی است که اقتضا کند راه جوابی را

۲۹- اصول متعارفه- حکمی است بدیهی که محتاج باقامه دلیل و برهان نباشد - مثال- جزء کوچکتر است از کل- دو مقدار مساوی با مقدار سوم متساویند

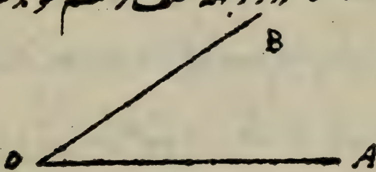
۳۰- علامات- علامات مستعمله در هندسه بعینه همانها باشند که در علم حساب ذکر شده

مقاله اوّل

خط مستقیم

۱ـ زوایا و خطوط عمود بر یکدیگر

۳۱ـ زاویه ـ زاویه شکلی است حادث از دو نیم خط OA و OB (ش ۸) که ابتدا از یک نقطهٔ O در دو جهت مختلف رسم شوند نقطهٔ O راس زاویه است و دو نیم خط OA و OB ضلعین زاویه است



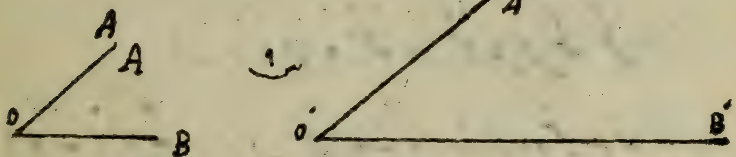
ش ۸

زاویه را میتوان تصور نمود از شکل پرگار و مقراض باز و از انفصال دو انگشت دست و از تقاطع دو جاده و از گوشهٔ میز و کتاب و غیره زاویه را گاه بحرف رأس میخوانیم وگاه بسه حرف چنانکه حرف رأس در وسط افتد مثلاً گوئیم زاویهٔ O یا AOB

واگر چند زاویه بیک رأس باشند محض رفع اشتباه هر کدام از آن زوایا را بسه حرف میخوانیم

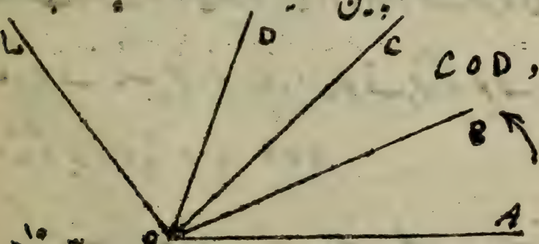
۳۲ـ دو زاویه را متساوی گوئیم وقتیکه درست قابل انطباق بر یکدیگر باشند

مقدار زاویه هیچ علاقه و بستگی با طول ضلعینش ندارد بلکه منوط است فقط بانفصال ضلعینش مثلاً دو زاویه O و O' متساویند هرچند که ضلعین O' اطول از O باشند ش ۹



ش ۹

۳۳ - هرگاه چند نیم خط OA و OB و OC و OD و .... و OL ابتدا از نقطه O در سطح رسم نمائیم و فرض کنیم نیم خط متحرکی که ابتدا بر OA واقع باشد در جهت معینی حول نقطه O مانند لولا بگردد و متدرجاً بر هر نیم خط OB و OC و OD وغیره بگذرد گوئیم زاویهٔ AOC مساویست با مجموع دو زاویه AOB و BOC و همچنین زاویه AOD مساویست باسه زاویه AOB و BOC و COD و هکذا ش ۱۰ و چنین مینویسیم



ش ۱۰

$AOC = AOB + BOC$ و $DOA = AOB + BOC + COD$

واگر فرض کنیم زاویهٔ AOL مساوی باشد با مجموع m عدهٔ زوایای

مساویه با AOB پس زاویهٔ AOL برابر است با m مرتبه زاویهٔ AOB

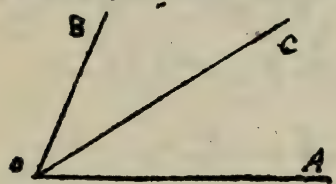
و از آن چنین مینویسیم $AOL = m \times AOB$ و بالعکس زاویه AOB

مساوی است با m ام جزء زاویهٔ AOL و آن را چنین مینمائیم

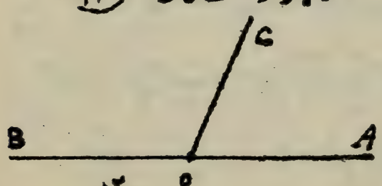
$AOB = \frac{1}{m} AOL$ و بطور کلی هرگاه زاویهٔ AOB برابر باشد

با m مرتبه n ام جزء زاویهٔ AOC آنرا چنین مینویسیم $AOB = \frac{m}{n} AOC$

۳۴- دو زاویه را مجاوره گوئیم در صورتیکه یک رأس باشند و در یک ضلع مشترک و در طرفین ضلع مشترک واقع گردند مانند دو زاویه مجاوره AOC



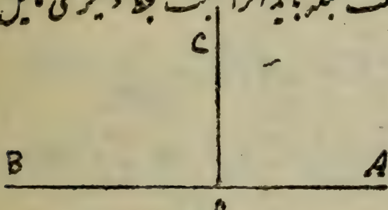
و BOC ش ۱۱ دگاه اتفاق افتد که دو ضلع خارجی بر استقامت یکدیگر واقع شوند مانند دو زاویه مجاوره AOC و BOC ش ۱۲



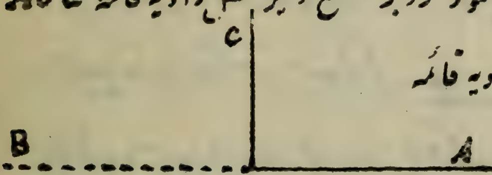
ش ۱۲

۳۵- هرگاه نیم خط OC تلاقی کند خط AB را در نقطهٔ O دو زاویهٔ مجاوره AOC و COB در یک سمت این خط احداث میکند پس اگر این دو زاویهٔ مجاوره مختلف باشند گوئیم نیم خط OC مایل است بر خط AB ش ۱۲ و اگر آن دو زاویه مجاوره متساوی باشند گوئیم نیم خط OC

عمود است بر خط AB س ۱۳ بنابراین خطی را بر خط دیگر عمود گوییم وقتیکه آن خط دیگر را بوجهی ملاقی کند که دو زاویه مجاوره مساویه احداث گردد کلیةً خطی را نمیتوان بطور مطلق مایل یا عمود گفت بلکه باید آنرا نسبت بخط دیگری مایل یا عمود خواند



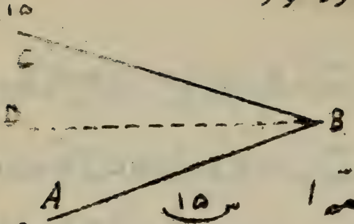
۳۶ـ زاویهٔ قائمه ـ دو زاویهٔ مساویه AOC و COB حادثه از عمود OC بر AB را س ۱۳ زوایای قائمه گویند بنابراین یکی از این دو زاویه یک قائمه است بعباره اخری زاویهٔ قائمه آنست که یکی از ضلعینش عمود شود بر ضلع دیگر مثل زاویهٔ قائمهٔ AOC و نیز میتوان گفت که زاویه قائمه آنست که چون یک ضلع



س ۱۴

آن را از آن سمت رأسش امتداد دهیم زاویهٔ دیگری مساوی آن زاویه احداث شود مثلاً در زاویهٔ قائمهٔ AOC س ۱۴ چون ضلع AO را محاذی OB امتداد دهیم زاویهٔ BOC مساوی با زاویهٔ قائمهٔ AOC تشکیل میگردد

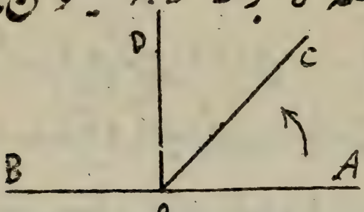
۳۷ـ خط منصّف الزاویه ـ خط منصّف هر زاویه خطی است که آن زاویه را بدو جزء مساویه قسمت نماید مثل خط BD که منصّف زاویهٔ ABC است س ۱۰



س ۱۵

قضیهٔ ۱

۳۸ - از نقطهٔ مفروضهٔ O بر خط AB میتوان یک عمود بر آن خط اخراج نمود نه بیش



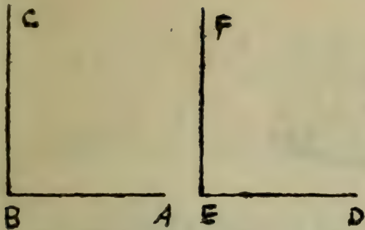
س ۱۶

برهان - فرض میکنیم نیم خط OC س ۱۶ ابتدا واقع باشد بر OA و بعد در حول نقطهٔ O (در جهتی که سهم نشان میدهد) دوران کند و منطبق شود بر OB و در این حرکت زاویهٔ AOC که ابتدا صفر است متدرجاً ترقی میکند و اما زاویهٔ BOC که ابتدا بسیار بزرگ است متدرجاً تنزل میکند تا رسد بصفر پس در آن مابین موضعی برای نیم خط OC مثل OD خط پیدا میشود که در آنجا دو زاویهٔ مجاوره AOD و BOD متساوی گردند بنابراین نیم خط OD عمود شود بر AB

و ظاهر است که چون OD از این موضع خارج شود مقدار دو زاویهٔ مجاوره مختلف و غیر متساوی میگردند پس از نقطهٔ O بیش از یک عمود نمیتوان بر AB اخراج نمود فهو المطلوب

۳۹ـ **نتیجه** ـ جمیع زوایای قائمه متساویند

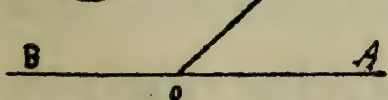
دو زاویهٔ قائمهٔ ABC و DEF مفروض است



س ۱۷

س ۱۷ شکل ثانی را بر شکل اول نقل میکنیم بطریقی که ضلع ED واقع شود بر BA و نقطه E بر B و چون FE عمود است بر ED واقع میشود بر استقامت BC که عمود است بر BA چونکه بموجب قضیهٔ فوق از یک نقطه B بیش از یک عمود نمیتوان بر AB اخراج نمود پس این دو زاویه ABC و FED درست برهم منطبق میشوند و متساوی میگردند

۴۰ـ **تعریف** ـ چون جمیع زوایای قائمه متساویند زاویهٔ قائمه مقداریست تغییر ناپذیر پس میتوان زوایا را بزاویهٔ قائمه سنجید و مقایسه نمود بنابراین زاویه را حاده یا منفرجه گوئیم بحسب آنکه کوچکتر یا بزرگتر از زاویهٔ قائمه باشد مثلاً



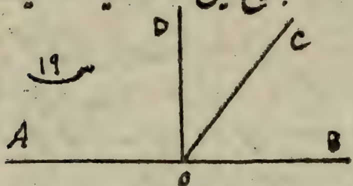
س ۱۸

زاویهٔ AOC س ۱۸ حاده است و زاویهٔ BOC منفرجه.

قضیهٔ ۲

۴۱ـ هرگاه خطی تلاقی کند خط دیگر را دو زاویهٔ مجاوره احداث میگردد که مجموعشان مساویست با دو زاویهٔ قائمه

فرض میکنیم در دو زاویه مجاوره AOC و COB اضلاع خارجی AO و OB
بر استقامت خطی باشند باید ثابت نمود که مجموع این دو زاویه مساویست با
دو زاویهٔ قائمه س ۱۹



برهان - از نقطهٔ O نیم خط OD را
بر AB عمود میکنیم و چون زاویهٔ AOC مساوی است با $\widehat{AOD}+\widehat{DOC}$
پس مجموع دو زاویهٔ مفروضه AOC و COB چنین نوشته میشود

$$\widehat{AOC}+\widehat{COB}=\widehat{AOD}+\widehat{DOC}+\widehat{COB}$$

و چون زاویهٔ AOD قائمه است و همچنین $\widehat{DOC}+\widehat{COB}$ نیز مساوی زاویهٔ
قائمهٔ $\widehat{DOB}$ است پس تساوی فوق چنین نوشته میشود

$$\widehat{AOC}+\widehat{COB}=\widehat{AOD}+\widehat{DOB}=\text{۲ قائمه}$$ فهو المطلوب

۴۲- تبصره - قضیه فوق را بطریق ذیل نیز میتوان اثبات نمود از
نقطه O نیم خط OD را بر AB عمود کرده این دو تساوی را مینویسیم

$$\widehat{AOC}=\widehat{AOD}+\widehat{DOC}$$
$$\widehat{COB}=\widehat{DOB}-\widehat{DOC}$$

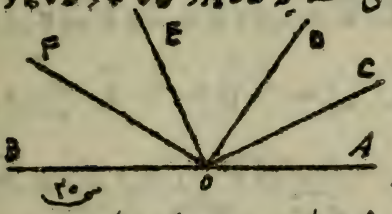
و چون آنها را عضو بعضو با یکدیگر جمع
کنیم زاویهٔ DOC حذف میشود و چنین حاصل میگردد

$$\widehat{AOC}+\widehat{COB}=\widehat{AOD}+\widehat{DOB}=\text{۲ قائمه}$$ فهو المطلوب

۴۳- **تعریف** - دو زاویه را که مجموعشان دو زاویه قائمه باشد مکمل یکدیگر گوییم
مثل دو زاویه مجاوره AOC و COB ش ۱۹ که مکمل یکدیگرند و دو زاویه را
که مجموعشان یک زاویه قائمه باشد متمم یکدیگر گوییم مثل دو زاویه DOC و COB
که متمم یکدیگرند ش ۱۹ و بدیهی است که دو زاویه متساویه دارای مکملات متساویه و
متممات متساویه میباشند و بالعکس دو زاویه که دارای یک مکمل و یک متمم باشند
متساویند (الفاظ مکمل و متمم از اصطلاحات علم مثلثات است)

۴۴- **تبصره ۲**- حکم قضیه فوق را میتوان باین عبارت ادا نمود هرگاه
اضلاع خارجی دو زاویه مجاوره AOC و COB ش ۱۹ بر استقامت خطی
باشند مجموع آن دو زاویه دو قائمه است یعنی مکمل یکدیگرند

۴۵- **نتیجه ۱**- مجموع زوایای متتالیه AOC و COD و EOD وغیره
ش ۲۰ حادثه در حول یک نقطه O
از خط AB در یک سمت خط مساویست

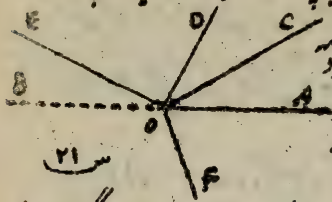


ش ۲۰

با دو زاویه قائمه زیرا که مجموع این زوایا مساویست با مجموع دو زاویه AOC
و BOC و این مجموع نیز بموجب قضیه فوق مساویست با دو زاویه قائمه

۴۶- **نتیجه ۲**- مجموع زوایای متتالیه AOC و DOC و EOD وغیره

س ۲۱ حادثه در حول نقطه O مساوی است با چهار زاویه قائمه زیراکه چون AO را
از آنطرف O امتداد دهیم مجموع زوایای معروضه



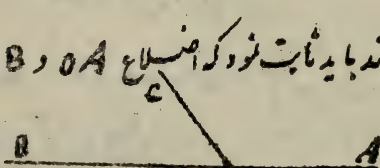
س ۲۱

مساوی میشود با مجموع زوایای حادثه در حول نقطه
O بر یک سمت AOB باضافه مجموع زوایای حادثه در حول O در سمت دیگر AOB
و هر کدام ازاین دو مجموع مساویست با دو زاویه قائمه بموجب نتیجه ا (نمره ۴۰)
پس مجموع کل زوایای حادثه در حول نقطه O مساویست با چهار زاویه قائمه

قضیه ۳ — (عکس قضیه سابقه)

۴۷ — هرگاه دو زاویه مجاوره مکمل یکدیگر باشند اضلاع خارجی آنها بر استقامت خطی واقع میشوند

فرض میکنیم دو زاویهٔ مجاورهٔ AOC و
COB مکمل یکدیگر باشند باید ثابت نمود که اضلاع OA و OB بر استقامت
خطی میباشند

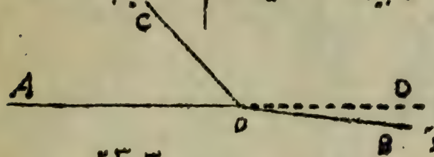


س ۲۲

برهان — امتداد OA با خط OC زاویه احداث میکند که بموجب قضیهٔ
سابقه مکمل AOC باشد بنابراین مساوی با BOC پس امتداد OA منطبق میشود بر OB
و اضلاع خارجی دو زاویهٔ AOC و COB بر یک استقامت واقع میشوند

دلیل مزبور را بطریق ذیل نیز میتوان بیان نمود فرض میکنیم دو زاویهٔ مجاور AOC

و BOC مکمل یکدیگر باشند س ۲۳



و چون AO را امتداد دهیم زاویهٔ

س ۲۳

مجاورهٔ AOC و COD بنابر قضیهٔ سابقه مکمل یکدیگر میگردند و چون دو زاویهٔ COB

و COD دارای یک مکمل AOC شدند متساوی میگردند و برهم منطبق میشوند

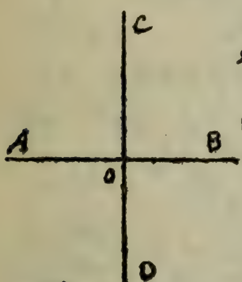
بنابراین ضلع OB منطبق میشود بر OD امتداد OA لهذا دو ضلع خارجی

OA و OB بر استقامت یک خط واقع میگردد فهو المطلوب

۴۸ - **نتیجه** - هرگاه از نقطهٔ O واقعه بر خط AB س ۲۴

دو نیم خط OC و OD از طرفین بر آن خط عمود کنیم

این دو نیم خط بر امتداد یکدیگر واقع میشوند

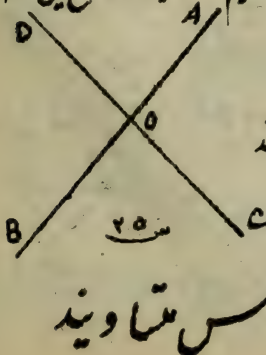


س ۲۴

۴۹ - **تعریف** - دو زاویه را متقابل بر أس گوئیم وقتیکه دو ضلع یکی از آنها

در امتداد دو ضلع دیگری واقع گردد

مثلاً دو زاویهٔ AOC و BOD متقابل بر أس هستند



س ۲۵

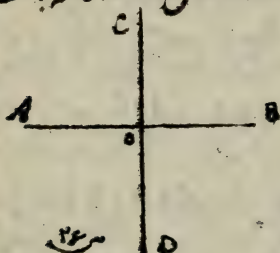
قضیهٔ ۴

۵۰ - دو زاویهٔ متقابلهٔ بر أس متساویند

فرض میکنیم دو خط AB و CD در نقطه O متقاطع باشند (ش ۲۵) گوئیم دو زاویهٔ
متقابله براس AOC و BOD متساویند

برهان — چون اضلاع خارجی دو زاویهٔ مجاورهٔ AOC , AOD بر استقامت یک خط واقعند پس این دو زاویه مکمل یکدیگر میشوند و همچنین دو زاویهٔ مجاوره BOD و AOD نیز مکمل یکدیگرند بهمان دلیل پس دو زاویهٔ AOC . BOD که هر دو مکمل یک زاویه AOD شدند متساوی میگردند فهو المطلوب

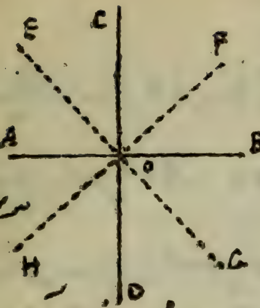
۵۱— **نتیجه** — هرگاه یکی از چهار زاویهٔ حادثه از تقاطع دو خط قائمه باشد سه زاویهٔ دیگر نیز قائمه اند زیرا که مثلاً اگر



ش ۲۶

زاویهٔ AOC قائمه باشد زاویهٔ متقابلهٔ براسش BOD نیز قائمه میشود و بعد هر کدام از دو زاویهٔ AOD و BOC نیز که مکمل دو زاویهٔ دیگرند قائمه میشوند پس از اینجا چنین استنباط میکنیم که اگر خطی عمود باشد بر خط دیگر بالعکس خط ثانی نیز عمود خواهد شد بر خط اول و آن دو خط را **متعامد** گوئیم

۵۲— **نتیجه** — دو منصف دو زاویهٔ مجاوره که از تقاطع دو خط حادث شده باشند عمود شوند بر یکدیگر و دو منصف دو زاویهٔ متقابله براسش بر امتداد



س ۲۷

همدیگر واقع میگردند

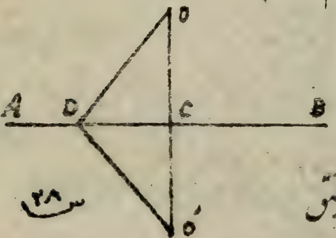
فرض میکنیم OE و OF دو منصف دو زاویهٔ مجاورهٔ AOC و COB باشند س ۲۷ چون مجموع این دو زاویه دو قائمه است پس مجموع نصف آنها EOC و COF یک قائمه میشود یعنی OF عمود است بر OE و حال فرض میکنیم OG امتداد OE باشد دو زاویهٔ BOG و DOG مرتباً متساویند با دو زاویهٔ AOE و COE و چون این دو زاویه متساویند پس DOG و BOG نیز متساوی میگردند و بنابراین OG منصف زاویهٔ BOD است پس بالاخره دو منصف دو زاویهٔ متقابله براس AOC و BOD بر امتداد یکدیگر واقعند و همینطور منصفهای دو زاویهٔ BOC و AOD و از اینچنین استنباط کنیم که منصفات چهار زاویهٔ حادثه بتقاطع AB و CD دو خط متعامد EG و FH تشکیل میدهند

قضیه ۵

۵۳ — از نقطهٔ مفروضه در خارج خطی میتوان یک عمود بر آن خط وارد آورد نه بیش

اولاً فرض میکنیم O نقطهٔ مفروضه باشد در خارج خط AB س ۲۸ پس

جزء اعلای سطح را در حول AB مانند لولا دوران میدهیم تا بر جزء اسفل منطبق شود و نقطهٔ ه بموضع هٔ قرار گیرد و بعد جزء اعلای سطح را بوضع اول خود بر میگردانیم و هٔ ه را وصل میکنیم و گوئیم خط هٔ ه عمود است بر AB



ش ۲۸

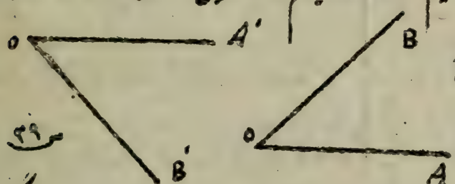
زیرا که اگر جزء اعلای سطح را بهمان طریق فوق مجدداً بر جزء اسفل منطبق کنیم نقطهٔ ه واقع میشود بر هٔ و خط هC منطبق میشود بر هٔC و زاویهٔ ACه درست میپوشاند زاویهٔ هٔAC را پس وقتیکه این دو زاویهٔ مجاوره متساوی شدند قائمه میگردند و خط AB عمود میشود بر هٔه و یا بالعکس (نمرهٔ ۱۵) هٔه نیز عمود میشود بر AB فهو المطلوب

ثانیاً هر خط دیگری مانند هD ش ۲۸ رسم کنیم عمود نیست بر AB زیرا که چون هٔD را وصل کنیم و جزء اعلای سطح را بهمان طریق فوق بر جزء اسفل منطبق کنیم دو زاویهٔ هDC و هٔDC درست بهمدیگر را میپوشانند و متساوی میگردند واما این دو زاویهٔ مجاوره مکمل یکدیگر نیستند چونکه اضلاع خارجی آنها هD و هٔD بر استقامت یک خط واقع نشده (چون مابین دو نقطهٔ ه و هٔ را بیش از یک خط مستقیم هٔه نمیتوان وصل نمود) پس این دو زاویهٔ قائمه

نیشوند بنابراین خط OD نسبت به AB مایل است

۵۴ — نتیجه — هرگاه دو زاویه یک رأس باشند و اضلاعشان ترتیباً عمود بر یکدیگر باشند آن دو زاویه متساویند و یا مکمل یکدیگرند

۵۵ — جهت زاویه — فرض میکنیم دو طرف سطح شکل را مشخص نموده باشیم یعنی یکی را طرف فوقانی و دیگری را طرف تحتانی قرار دهیم بعد زاویهٔ AOB را شکل ۲۹ منظور میآوریم و تصوّر میکنیم که ناظری در طرف فوقانی در نقطه O مواجه OA قرار گرفته باشد و سطح شکل



شکل ۲۹

بواسطه خط غیر محدود OA بر دو ناحیه منقسم گشته یکی در سمت یسار و دیگری در سمت یمین ناظر باشد پس در این صورت اگر نیم خط OB در ناحیهٔ اوّل باشد گوئیم زاویه AOB در جهت مثبت واقع است و در حالت مخالف در جهت منفی است

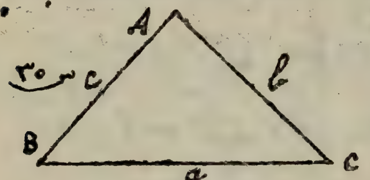
و اگر اطراف سطح (تحتانی و فوقانی) را تغییر و تبدیل دهیم یعنی سطح را برگردانیم جهت زاویه تغییر میکند مانند دو زاویه AOB و BOA که در دو جهت مخالف واقع اند پس در تعریف و تشخیص جهت هر زاویه باید

ترتیب وضع اضلاع را معین نمود

و اگر دو زاویه AOB و A'O'B' متساوی و اما در خلاف جهة باشند ش ۲۹ میتوان O'A' و O'B' را مرتباً بر OA و OB منطبق نمود مگر پس از برگردانیدن سطح A'O'B'

۲ — مثلثات

۵۶ - تعریف - مثلث شکلی است که صورت گرفته از سه خط که دو بدو با همدیگر ملاقی شوند ش ۳۰

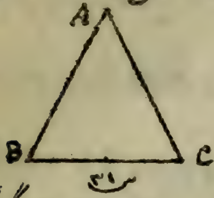


هر مثلث دارای سه ضلع و سه زاویه است

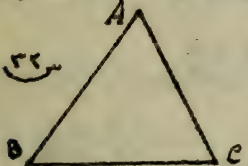
و از برای ترسیم مثلث سه نقطه A و B و C غیر واقعه بر یک استقامت اختیار نموده ش ۳۰ مابین آنها را بقطعات خطوط بیکدیگر وصل میکنیم نقاط A و B و C عبارتند از رؤس مثلث و خطوط AB و AC و BC اضلاع مثلث و زوایای حادثه در A و B و C زوایای مثلث باشند

مثلث را بسه حرف رؤسش بهر ترتیبی که بخواهیم میخوانیم مثلاً گوئیم مثلث ABC و رؤس مثلث را همواره بحروف کبیره و طول اضلاع مقابلشان BC و AC و AB را مرتباً بحروف صغیره نظایرشان a و b و c نمائیم و مجموع $a + b + c$ طول اضلاع را محیط مثلث خوانند

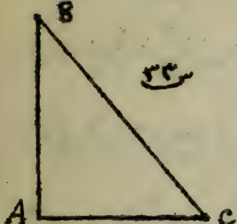
۵۷ ـ **اقسام مختلفه مثلث** ـــ مثلث مختلف الاضلاع آنست که طول سه ضلعش مختلف باشند مانند مثلث ABC س ۳۰



مثلث متساوی الساقین آنست که دو ضلعش متساوی باشند مانند مثلث ABC س ۳۱ و نقطه تقاطع دو ضلع متساویه را مخصوصاً رأس گوئیم و ضلع مقابل آن را **قاعده**

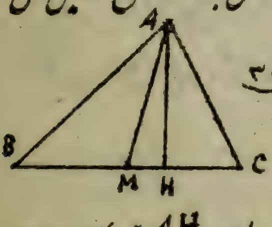


مثلث متساوی الاضلاع آنست که هر سه ضلعش متساوی باشند س ۳۲ و عنقریب خواهیم دید که هر مثلث متساوی الاضلاع متساوی الزوایا نیز هست

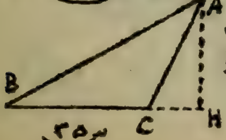


مثلث قائم الزاویه آنست که یک زاویه اش قائمه باشد و ضلع مقابل بزاویه قائمه را **وتر** خوانند س ۳۳

۵۸ ـ **میانه** هر مثلث خطی است واصل از یک رأس بر وسط ضلع مقابل مثل میانه AM س ۳۴ **ارتفاع**



هر مثلث عمودی است که از یک رأس بر ضلع مقابل و یا بر امتداد آن ضلع فرود آید مانند ارتفاع AH س ۳۴ و ۳۵



هر مثلث دارای سه ارتفاع و سه میانه و سه منصف الزوایاست

(منصفات زوایای مثلث)

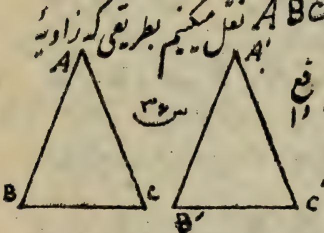
۲- خواص مثلثات متساوی الساقین

قضیهٔ ۶

۵۹- در هر مثلث متساوی الساقین دو زاویه مقابله بدو ضلع متساوی متساوی باشند

فرض میکنیم در مثلث ABC میرو $AB = AC$ باید ثابت کرد که زاویهٔ
B مساویست با زاویهٔ C $\hat{B} = \hat{C}$

برهان - مثلث متساوی الساقین A'B'C' را مساوی مثلث مفروض ABC
میسازیم و آن را بر میگردانیم و معکوساً بر مثلث ABC نقل میکنیم بطریقی که زاویهٔ
A' منطبق شود بر مساویش زاویه A و ضلع A'C' واقع
شود بر استقامت AB و ضلع A'B' بر استقامت



AC و چون ضلع A'C' مساویست با AC پس بنا بفرض مساوی میشود با AB و نقطهٔ C'
واقع میشود بر نقطهٔ B و همینطور چون ضلع A'B' مساویست با AB پس بنا بفرض مساوی
میشود با AC و نقطهٔ B' واقع میشود بر نقطهٔ C و دو مثلث درست بر همدیگر منطبق
میگردند و زاویهٔ C' مساوی میشود با زاویهٔ B ولی قبلاً زاویهٔ C' مساویست با C

پس زاویهٔ C مساویست بازاویهٔ B فهو المطلوب

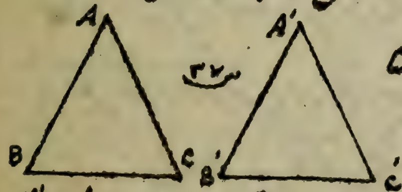
۴۰- معتبره - از قضیهٔ فوق خاصیت مثلث متساوی الساقین خوب ظاهر میشود که چون آنرا معکوس نمائیم برخودش قابل انطباق است

قضیهٔ ۷ (عکس قضیه ۶)

۴۱- هرگاه در مثلثی دو زاویهٔ متساوی باشند ضلعین مقابل بآن دو زاویه متساوی هستند

فرض میکنیم در مثلث ABC س ۳۲ زاویهٔ B = زاویهٔ C باید ثابت گرد AB = AC

برهان- مثلث A'B'C' را مساوی با مثلث ABC رسم میکنیم و آنرا برمیگردانیم و معکوساً نقل میکنیم بر مثلث ABC بطریقی که ضلع B'C' واقع شود بر مساویش BC و نقطهٔ C' بر B و نقطه B' بر C و چون زاویهٔ C'



س ۳۲

مساویست بازاویهٔ C پس بنا بفرض مساوی میشود بازاویهٔ B و ضلع A'C' واقع شود بر استقامت AB و همینطور چون زاویهٔ B' مساویست بازاویهٔ B پس بنا بفرض مساوی میشود بازاویهٔ C پس ضلع A'B' واقع شود بر استقامت AC و نقطهٔ A' یکدفعه واقع میشود بر BA و CA یعنی بر فصل مشترکشان A و دو مثلث درست بریکدیگر منطبق میگردد پس ضلع A'B'

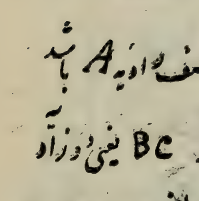
گر ابتدا مساوی بود با AB حال مساوی است با AC بنابراین دو ضلع AB و AC متساوی میشوند فهو المطلوب

۶۲- **نتیجه** - در هر مثلث متساوی الاضلاع سه زاویه نیز متساویند یعنی هر مثلث متساوی الاضلاع ضمناً متساوی الزوایا نیز هست و بالعکس

قضیه ۸

۶۳- در هر مثلث متساوی الساقین منصف زاویهٔ راس عمود است بر قاعده و هم منصف آن قاعده است

فرض میکنیم در مثلث متساوی الساقین ABC مرسوم خط AD منصف زاویه A باشد یعنی $\widehat{BAD}=\widehat{DAC}$ و باید ثابت کرد که AD عمود است بر BC یعنی دو زاویه مجاوره ADB و ADC متساویند و همچنین نقطه D وسط BC است یعنی BD = DC



ش ۳۸

برهان - مثلث ADB را در حول AD دوران میدهیم تا منطبق شود بر مثلث ADC و چون زاویهٔ $\widehat{DAB}$ بفرض مساوی است با زاویه $\widehat{DAC}$ پس ضلع AB واقع میشود بر استقامت AC و چون بفرض AB = AC پس نقطهٔ B واقع میشود بر C و دو مثلث درست بر یکدیگر منطبق میگردند و از تساوی این دو مثلث لازم میآید که $\widehat{ADB}=\widehat{ADC}$ پس AD عمود میشود بر BC و همچنین BD = CD فهو المطلوب

۴۶ — تبصره. خط AD یکی است که هم منصف زاویهٔ راس A و هم خط میانه مرسوم از A و هم ارتفاع مرسوم از A است بر ضلع مقابل و هم عمود است بر وسط ضلع BC پس او برای تعیین خط AD یکی از شرایط فوق کافیست و بنابراین از قضیهٔ فوق چنین نتیجه میشود که در هر مثلث متساوی الساقین اوّلاً خط میانه مرسوم از راس منصف زاویه راس و هم عمود است بر ضلع سوم ثانیاً عمود وارد از راس بر ضلع سوم منصف زاویه راس و هم منصف ضلع سوم است ثالثاً عمود مرسوم بر وسط قاعده مرور کند بر راس و زاویهٔ راس را نصف میکند

۴ — حالات تساوی دو مثلث

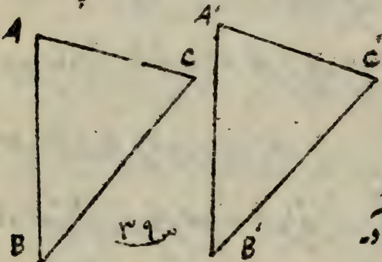
۴۵ — سه ضلع و سه زاویهٔ هر مثلث شش مقدار تشکیل دهند که عبارتند از شش جزء مثلث و دو مثلث را متساوی گوئیم وقتیکه قابل انطباق باشند یعنی شش جزء یکی مرتباً نظیر بنظیر مساوی شوند با شش جزء مثلث دیگر ولیکن بجهة تساوی دو مثلث تحقیق تساوی هر شش جزء لازم نیست بلکه فقط کافیست که تساوی سه جزء از آن اجزاء را که مناسب اختیار شوند تحقیق نمود پس از اینجا سه قضیه در حالات تساوی دو مثلث مقرر میگردد

قضیهٔ ۹ (حالت اوّل تساوی دو مثلث)

۶۶- هرگاه دو زاویه و ضلع بینهما از مثلثی مساوی باشد با دو زاویه و ضلع بینهما از مثلث دیگر نظیر بنظیر آن دو مثلث مساوی هستند

فرض میکنیم در دو مثلث ABC و $A'B'C'$ (ش ۳۹) $B'C' = BC$ و زاویهٔ B مساوی زاویهٔ B' و زاویهٔ $C = \hat{C'}$ باید ثابت کرد که این دو مثلث مساویند

برهان — مثلث $A'B'C'$ را نقل میکنیم بر مثلث ABC بطوریکه ضلع $B'C'$ واقع شود بر مساویش BC و نقطه B' بر B و نقطه C' بر C و چون زاویه B'



ش ۳۹

مساویست با $\hat{B}$ ضلع $B'A'$ واقع میشود بر استقامت BA و نقطه A' بر BA و همینطور چون زاویهٔ C' مساویست با زاویهٔ C ضلع $A'C'$ واقع میشود بر استقامت CA و نقطه A' بر CA و چون نقطهٔ A' بایستی یکمرتبه واقع شود بر دو خط BA و CA پس واقع میگردد بر A فصل مشترک این دو ضلع و آنوقت دو مثلث درست بر همدیگر منطبق میشوند و مساوی میگردند

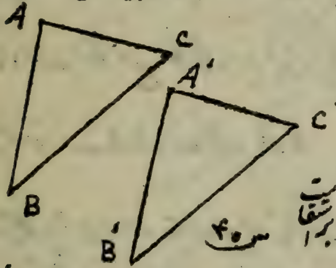
۶۷- پس از قضیه فوق چنین نتیجه میشود که از تساوی $C'B' = CB$ و $\hat{B} = \hat{B'}$ و $\hat{C} = \hat{C'}$ سه تساوی $\hat{A} = \hat{A'}$ و $A'B' = AB$ و $A'C' = AC$ حاصل میشود و از این تساویها ظاهر است که در دو مثلث متساویه اضلاع مقابل بزوایای متساویه متساویند و بالعکس

قضیهٔ ۱۵ (حالت دوم تساوی دو مثلث)

۶۸- هرگاه دو ضلع و زاویهٔ بینهما از مثلثی مساوی باشد با دو ضلع و زاویهٔ بینهما از مثلث دیگر نظیر بنظیر آن دو مثلث متساویند

فرض میکنیم در دو مثلث ABC و $A'B'C'$ زاویهٔ $\widehat{A'}=\widehat{A}$ و $A'B'=AB$ و $A'C'=AC$ گوئیم این دو مثلث متساویند

برهان مثلث $A'B'C'$ را نقل میکنیم بر مثلث ABC بطوریکه ضلع $A'B'$ واقع شود بر مساویش AB و نقطهٔ A' بر A و نقطهٔ B' بر B و چون زاویهٔ A' مساویست با زاویهٔ A ضلع $A'C'$ واقع میشود بر امتداد



شکل ۴۰

AC و چون $A'C'$ مساوی است با AC نقطهٔ C' واقع میشود بر C و چون طرفین ضلع سوم $B'C'$ واقع شد بر طرفین ضلع سوم BC پس این دو ضلع نیز برهم منطبق میشوند بنابراین دو مثلث درست بر یکدیگر منطبق میگردند

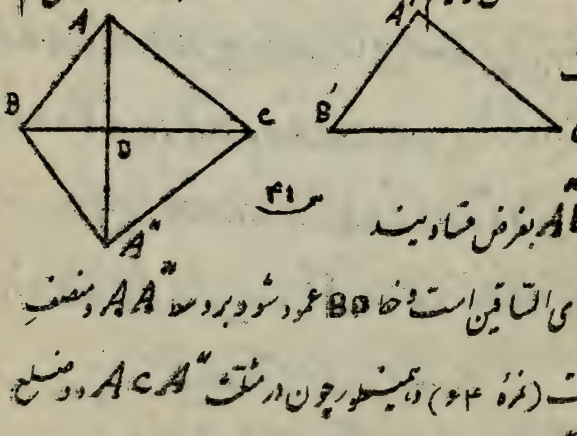
۶۹- پس از سه تساوی $\widehat{A'}=\widehat{A}$ و $A'B'=AB$ و $A'C'=AC$ این سه تساوی نتیجه میشود $B'C'=BC$ و $\widehat{B'}=\widehat{B}$ و $\widehat{C'}=\widehat{C}$

قضیهٔ ۱۱ (حالت سوم تساوی دو مثلث)

۷۰- هرگاه سه ضلع از مثلثی مساوی باشد با سه ضلع از مثلث دیگر نظیر بنظیر آن دو مثلث متساویند

فرض میکنیم در دو مثلث ABC و $A'B'C'$ (ش ۴۱) $AB=A'B'$ و $AC=A'C'$ و $BC = B'C'$ گوئیم این دو مثلث متساویند

برهان- مثلث $A'B'C'$ را برمیگردانیم و معکوساً پهلوی مثلث ABC چنان قرار میدهیم که ضلع $B'C'$ منطبق شود بر مساویش BC و نقطه B' بر B و C' بر C در اینصورت A' نیز بوضع A'' قرار گیرد بطوریکه A و A'' در طرفین ضلع مشترک BC افتند و خط AA'' را وصل میکنیم و از نقطه D وسط AA'' بر B و C وصل میکنیم



ش ۴۱

و میگوئیم چون در مثلث ABA'' دو ضلع AB و $A''B = A'B'$ بفرض متساویند پس این مثلث متساوی الساقین است و خط BD عمود شود بر وسط AA'' و منصف زاویهٔ $\widehat{ABA''}$ است (نمرهٔ ۶۴) و همینطور چون در مثلث ACA'' دو ضلع AC و $A''C = A'C'$ بفرض متساویند پس این مثلث نیز متساوی الساقین است و خط CD عمود شود بر وسط AA'' و منصف زاویهٔ ACA'' است و چون که وسط AA''

بیش از یک عمود نمیتوان اخراج نمود پس این دو منصف الزاویه یعنی عمود BD و CD بر استقامت یک خط واقع میگردند و منطبق میشوند بر BC و بنابراین زاویه ABC مساوی میشود با زاویه $A''BC$ یعنی با زاویه $A'B'C'$ و همچنین زاویه ACB مساوی میشود با زاویه $A''CB$ یعنی با $A'C'B'$ پس در دو مثلث ABC و $A'B'C'$ دو زاویه و ضلع بینهما متساوی میشوند یعنی $BC = B'C'$

$\widehat{B} = \widehat{B'}$ و $\widehat{C} = \widehat{C'}$ پس دو مثلث متساوی میگردند

۷۱— دلیل دیگر — در قضیه فوق بجای تساوی دو زاویه ABC و $A'B'C'$ میتوان تساوی دو زاویه BAC و $B'A'C'$ را اثبات نمود بدینطریق چون دو مثلث ABA'' و ACA'' بن ۴۱ متساوی الساقین هستند پس این دو تساوی حاصل میشود $BAA'' = BA''A$ و $CAA'' = CA''A$ و چون این دو تساوی را عضو بعضو جمع کنیم حاصل میشود $BAA'' + CAA'' = BA''A + CA''A$ و یا $BAC = BA''C = B'A'C'$ پس در دو مثلث ABC و $A'B'C'$ چون دو ضلع و زاویه بینهما متساوی هستند این دو مثلث متساوی میگردند

۷۲— پس از قضیه فوق چنین نتیجه میشود که از سه تساوی $A'B' = AB$ و $A'C' = AC$ و $B'C' = BC$ این سه تساوی حاصل میشود $\widehat{A'} = \widehat{A}$ و $\widehat{B'} = \widehat{B}$ و $\widehat{C'} = \widehat{C}$

۷۳ - تبصره - از قضایای فوق چنین استنباط میشود که در دو مثلث شش جزء نظر بنظیر متساوی میگردند وقتیکه سه جزء از آن دو مثلث متساوی باشند و از این سه جزء یکی از ترکیبات ثلاثهٔ ذیل صورت می‌بندد اوّلاً دو زاویه و ضلع بینهما ثانیاً دو ضلع و زاویهٔ بینهما ثالثاً سه ضلع و در بحث اشکال هندسی اغلب برای اثبات تساوی دو زاویه یا دو خط تساوی دو مثلث را بکار برند

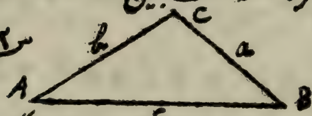
۵ - قضایای راجعه بمثلث

قضیهٔ ۱۲

۷۴ - در هر مثلث هر ضلع اقصر است از مجموع دو ضلع دیگر

در مثلث ABC (س ۴۲) میگوئیم ضلع BA اقصر است از $AC + BC$ زیرا که قطعه خط AB بنا بتعریف خط مستقیم اقصر فاصله است ما بین نقطهٔ A و B

س ۴۲



پس $AB < AC + BC$

۵ - نتیجه - در هر مثلث هر ضلع اطول است از تفاضل دو ضلع دیگر مثلاً فرض میکنیم AB ضلع بزرگتر باشد بنا بر قضیهٔ فوق چنین مینویسیم $AB < AC + BC$ و چون از طرفین این نامساوی ضلع AC را اسقاط کنیم چنین حاصل میشود

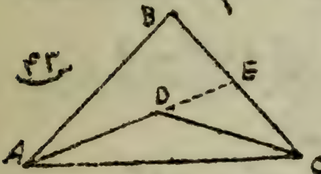
$AB - AC < BC$ یا $BC > AB - AC$

قضیهٔ ۱۳

۶۷- مجموع فواصل هر نقطهٔ مفروضه در داخل مثلث از طرفین هر کدام از اضلاع اقصر است از مجموع دو ضلع دیگر

مثلاً نقطهٔ D را درون مثلث ABC س ۴۲ فرض میکنیم و از آن تا A و C وصل میکنیم باید ثابت کرد که

$$AD + DC < AB + BC$$



س ۴۲

برهان- خط AD را امتداد میدهیم تا ضلع BC را در نقطهٔ E قطع کند و آنوقت از مثلث ABE بنابر قضیهٔ فوق این نامساوی نتیجه میشود $AD + DE < AB + BE$

و همچنین از مثلث CED چنین حاصل میشود $DC < DE + CE$ و این دو نامساوی را عضو بعضو با یکدیگر جمع میکنیم چنین میشود

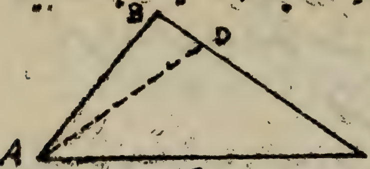
$$DA + DE + DC < AB + BE + DE + EC$$

و چون از طرفین این نامساوی DE را اسقاط کنیم و بجای $BE + EC$ مساویش BC را قرار دهیم چنین نتیجه میشود $AD + DC < AB + BC$ فهو المطلوب

قضیهٔ ۱۴

۷۲- هرگاه در مثلثی دو زاویهٔ غیر متساوی باشند دو ضلع مقابل بآن دو زاویه نیز غیر متساویند و زاویهٔ اعظم مقابل است بضلع اطول

فرض میکنیم در مثلث ABC ش ۲۴ زاویهٔ A بزرگتر از زاویهٔ C باشد باید ثابت کرد که $BC > AB$



ش ۲۴

برهان – چون زاویهٔ A بفرض بزرگتر است از زاویهٔ C میتوان از نقطهٔ A خطی مانند AD چنان مرور داد که زاویهٔ DAC مساوی زاویهٔ C جدا شود پس مثلث ADC متساوی الساقین است یعنی $AD = DC$ ولی از مثلث ABD این نامساوی حاصل میشود $BD + DA > AB$ و چون بجای AD مساویش DC را قرار دهیم چنین میشود $BD + DC > AB$ یا $BC > AB$

قضیهٔ ۱۵ (عکس قضیهٔ سابقه)

۷۸- هرگاه در مثلثی دو ضلع غیر متساوی باشند دو زاویهٔ مقابل به آن دو ضلع نیز غیر متساویند و ضلع اطول مقابل است بزاویهٔ اعظم

فرض میکنیم در مثلث ABC ش ۲۴ $BC > AB$ باید ثابت کرد که $\hat{A} > \hat{C}$

برهان – هرگاه زاویهٔ A مساوی بود با زاویهٔ C لازم میآید که دو ضلع AB و BC نیز مساوی باشند و این خلاف فرض است و اگر زاویهٔ A کوچکتر بود از زاویهٔ C لازم میآید که ضلع BC نیز کوچکتر باشد از AB و این نیز خلاف فرض است

پس لابد زاویهٔ A بزرگتر است از زاویه C فهو المطلوب

قضیهٔ ۱۶

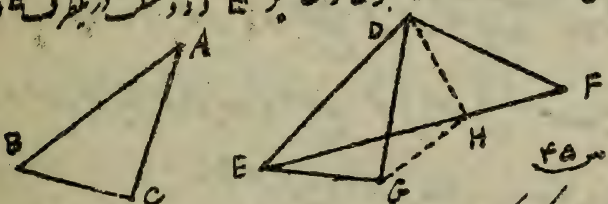
۷۹ - هرگاه دو ضلع مثلثی مساوی باشد با دو ضلع مثلث دیگر نظیر بنظیر و زاویهٔ حادثهٔ مابین دو ضلع اول اعظم باشد از زاویهٔ حادثهٔ مابین دو ضلع دوم گوئیم ضلع سوم مثلث اول اطول است از ضلع سوم مثلث دوم

فرض میکنیم در دو مثلث ABC و DEF س ۴۵ AB = DE

AC = DF , BAC < EDF

و باید ثابت کرد که BC < EF

برهان - مثلث ABC را بر مثلث DEF نقل میکنیم بطوریکه AB منطبق شود بر مساویش DE و نقطه A بر D و B بر E و دو مثلث در یکطرف DE افتند



س ۴۵

و چون زاویهٔ A کوچکتر است از زاویه D پس ضلع AC واقع میشود در درون زاویه EDF و مثلث ABC بوضع EDG قرار میگیرد و بعد خط HD منصف زاویهٔ GDF را رسم میکنیم این خط قطع میکند ضلع EF را در نقطه H و از H به G وصل میکنیم و در دو مثلث DHG , FHD

زاویهٔ HDG مساویست با زاویهٔ HDF بعمل و ضلع DH مشترک است و DG = DF بفرض چونکه هر دو مساویند با AC پس این دو مثلث متساوی میشوند بنابراین HG مساوی میشود با HF ولی از مثلث EGH این نامساوی نتیجه میشود EG < EH + HG و چون بجای GH مساویش HF را قرار دهیم چنین میشود EG < EH + HF و یا بالاخره EF < BC

۸۰ - تبصرهٔ - ممکن است نقطهٔ G در داخل مثلث افتد آنوقت دلیل بعینه همانست که ذکر شد و اگر G بر ضلع EF واقع شود قضیه بدیهی است

قضیهٔ ۱۷ (عکس قضیهٔ فوق)

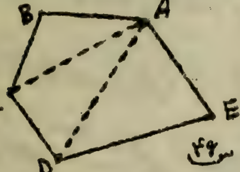
۸۱ - هرگاه در دو مثلث ABC و DEF س ۴۵ دو ضلع نظیر بنظیر متساوی باشند AB = DE و AC = DF و ضلع سوم EF از مثلث اول اطول باشد از ضلع سوم BC از مثلث دوم گوئیم زاویهٔ D مقابل به EF اعظم است از زاویهٔ A مقابل به BC

برهان - اگر زاویهٔ D مساوی بود با زاویهٔ A لازم میآمد که دو مثلث متساوی باشند و EF = BC و این خلاف فرض است و اگر زاویهٔ D کوچکتر بود از زاویهٔ A لازم میآمد که EF کوچکتر باشد از BC و این نیز خلاف

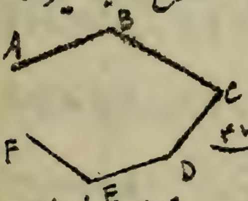
فرض است پس لابد زاویهٔ D اعظم است از زاویهٔ A

۶ ـ اشکال کثیر الاضلاع

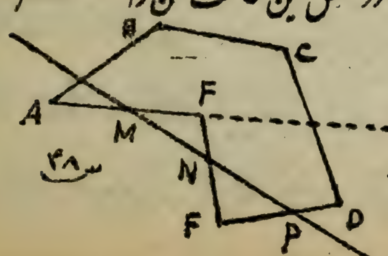
۲ ـ تعریفات ـ کثیر الاضلاع قطعهٔ سطح مستوی است که از اطراف بخطوط مستقیمه محدود شده باشد مثل ABCDE س ۴۶ و قطعات خطوط AB



و BC و CD و . . . اضلاع کثیر الاضلاع هستند و زوایای ABC و BCD و CDE و غیرها که مابین هر دو ضلع متوالیه زوایای کثیر الاضلاع میباشند و رئوس این زوایا رئوس کثیر الاضلاع است و هر خط واصل مابین هر دو رأس غیر متوالیه را قطر کثیر الاضلاع خوانند مثل قطر AC و AD و مجموع طولهای اضلاع را محیط کثیر الاضلاع گویند



و هر خط منکسر غیر مسدود را دورهٔ کثیر الاضلاعی خوانند س ۴۷ و هر دورهٔ کثیر الاضلاعی مسدود یا غیر مسدود را محدب گویند وقتیکه هر ضلعش را امتداد دهیم تمام شکل در یکطرفش افتد و در عکس این حالت آن را مقعر خوانند



و کثیر الاضلاع را محدب یا مقعر گویند بحسب آنکه محیطش خط منکسر

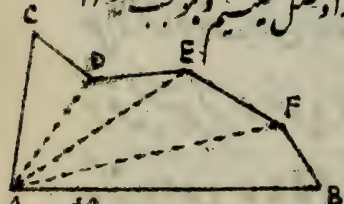
محدّب یا مقعر باشد ش ۴۶ و ۴۸ و محیط کثیر الاضلاع را خط مستقیم بیش از دو نقطه قطع نکند زیرا که اگر مثلاً خط MP کثیر الاضلاعی را در سه نقطه M و N و P قطع کند ش ۴۸ و دو نقطه M و P از کثیر الاضلاع در طرفین ضلعی که بنقطه N قطع شده واقع باشند کثیر الاضلاع محدّب نیست

ساده ترین جمیع اشکال کثیر الاضلاع آنست که شامل سه ضلع باشد و آنرا مثلث گویند (نمرهٔ ۵۶) و اگر چهار ضلعی باشد ذو اربعة اضلاع و پنج ضلعی ذو خمسة اضلاع و هکذا

قضیهٔ ۱۸

۸۳ — هر قطعه خطی اقصر است از هر خط منکسری که منتهی شده باشد بطرفین آنخط

مثلاً فرض میکنیم خط AB ش ۴۹ از طرفین محدود شده باشد بخط منکسر ACDEFB و خطوط AD و AE و AF را وصل میکنیم و بموجب قضیهٔ ۱۱



ش ۴۹

(نمره ۷۳) چنین حاصل شود $AD < AC + CD$

$AE < AD + DE$ و $AF < AE + EF$

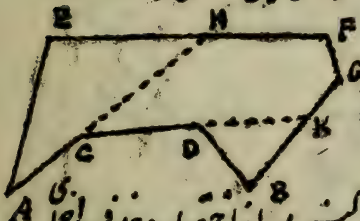
$AB < AF + FB$

پس از جمع این نامساویها و حذف اجزای مشترکه از طرفین چنین حاصل میشود

$$AB < AC + CD + DE + EF + FB$$

۸۴- **نتیجهٔ ۱** ـ محیط هر خط منکسر محدب اقصر است از محیط هر خط منکسر دیگری که بر آن احاطه نموده و بر طرفین آنخط منتهی شده باشد

فرض میکنیم مثلاً خط منکسر AEFGB احاطه کرده باشد بر خط منکسر ACDB پس اضلاع AC و CD را در یک جهة امتداد میدهیم تا در نقاط H و K با خط تلاقی کنند و آنوقت بنابر قضیهٔ فوق نامساویهای ذیل حاصل میشود



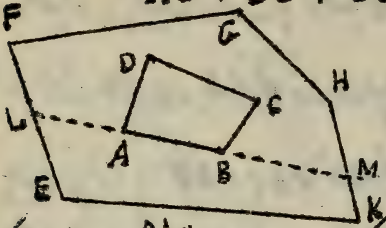
$$AC + CH < AE + EH$$
$$CD + DK < CH + HF + FG + GK$$
$$DB < DK + KB$$

و چون این نامساویها را عضو بعضو با یکدیگر جمع کنیم پس از اختصار و حذف اجزای مشترکه از طرفین چنین حاصل شود

$$AC + CD + DB < AE + EF + FG + GB$$

۸۵- **نتیجهٔ ۲** ـ محیط هر کثیرالاضلاع محدب اقصر است از محیط هر نوع خطی که از اطراف بر آن احاطه کرده باشد

فرض میکنیم کثیرالاضلاع EFGHK را از اطراف احاطه کرده باشد بر کثیرالاضلاع ABCD ضلع AB را امتداد میدهیم تا خط محیط را در دو نقطه ما و M قطع کند پس بنابر آنچه مقدم شد چنین میشود



س ۵۱

$$AD + DC + CB < LA + LF + FG + GH + HM + MB$$

$$LA + AB + BM < LE + EK + KM$$

چون این دو نامساوی را عضو بعضو جمع کنیم پس از اختصار و حذف اجزای مشترک از طرفین چنین حاصل شود

$$AB + BC + CD + DA < EF + FG + GH + HK + EK$$

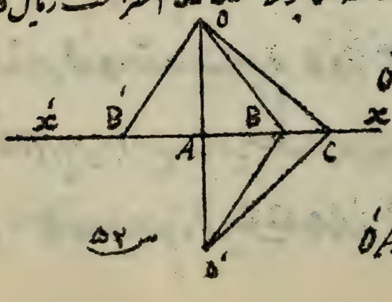
۷ — خطوط عمود و مایل

قضیهٔ ۱۹

۷۶ - چون از نقطهٔ واقعهٔ در خارج خطی یک عمود و خطوط مایله بر آن خط رسم کنیم

اولاً عمود اقصر است از هر خط مایل ثانیاً دو مایل متساوی البعد از موقع عمود متساویند ثالثاً از دو مایل مختلف البعد آنکه از موقع ابعد باشد اطول است

اولاً باید ثابت کرد که عمود OA وارد از نقطهٔ O بر خط xx' اقصر است از مایل OB (س ۵۲)



س ۵۲

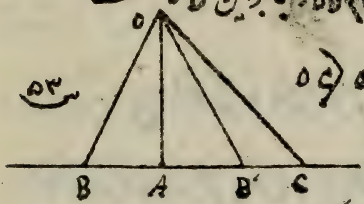
برهان — OA را باندازهٔ خود تا نقطهٔ O' امتداد میدهیم و خط BO' را وصل میکنیم در دو مثلث OAB و $O'AB$

دو ضلع و زاویه بینهما متساوی‌اند چونکه ضلع AB مشترک است و $OA = O'A$ بعمل و
دو زاویه OAB و $O'AB$ قائمه‌اند پس این دو مثلث متساوی میگردند و OB
مساوی میشود با $O'B$ و چون خط OO' اقصر است از خط منکسر OBO' پس OA نصف
OO' کوچکتر است از OB نصف OBO' یعنی $OA < OB$

ثانیاً فرض میکنیم OB و OB' دو مایل باشند که مواقعشان B و B' یک فاصله باشند
از نقطه A موقع عمود OA یعنی $AB = AB'$ و باید ثابت کرد $OB = OB'$
برهان - در دو مثلث OAB و OAB' دو ضلع و زاویه بینهما متساوی‌اند یعنی زوایای
در A قائمه‌اند و ضلع OA مشترک است و $AB' = AB$ بفرض پس این دو مثلث
متساوی میگردند و $OB = OB'$

ثالثاً فرض میکنیم دو مایل OB و OC را که مواقعشان B و C مختلف البعد باشند
از نقطه A موقع عمود OA و AC بزرگتر از AB باشد باید ثابت کرد $OB < OC$
برهان - فرض میکنیم که نقاط B و C در یکطرف نقطه A باشند و OA را بطول $O'A$
مساوی OA امتداد میدهیم و $O'B$ و $O'C$ را وصل میکنیم در دو مثلث ABO
و ABO' چون دو ضلع و زاویه بینهما متساوی‌اند پس این دو مثلث متساوی میگردند
و $OB = O'B$ و دو مثلث ACO و ACO' نیز متساوی‌اند بهمان دلیل

فوق پس $o'c = oc$ و چون نقطهٔ B واقع است در درون مثلث $o'co$
(و یا بدلیل نمره ۸۴ نتیجه ۱) پس $o'c + oc > o'B + oB$ و بنابراین oB نصف $oB + o'B$



اقصر میشود از oc نصف $o'c + oc$ یعنی $oB < oc$
و اگر فرض کنیم B و c در طرفین نقطهٔ A باشند س ۵۳
ما بین A و c طول AB' را مساوی AB جدا میکنیم و چون oB مساوی است
با oB' پس اقصر میشود از oc

۸۷ـ **قضیهٔ عکس** ــ از احکام قضیهٔ فوق احکام عکس ذیل نتیجه میشود
اولاً عمود اقصر خطی است که بتوان از یک نقطه بخطی وصل نمود ثانیاً دو مایل متساوی الطول
متساوی البعدند از موقع عمود ثالثاً دو مایل مختلف الطول مختلف البعدند از موقع
موقع عمود و آنکه اطول باشد از موقع عمود ابعد است

۸۸ـ **نتیجه ۱** ــ از یک نقطه نمیتوان بیش از دو مایل متساوی بخطی
وصل نمود و این دو مایل واقع شوند در طرفین عمود

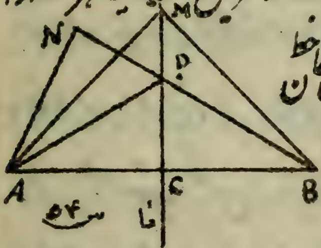
۸۹ـ **نتیجه ۲** ــ در هر مثلث قائم الزاویه هر ضلع مجاور بزاویهٔ قائمه اقصر
است از طول وتر و همچنین هر زاویهٔ مجاور به وتر حاده است

۹۰ـ **تعریف** ــ فاصلهٔ هر نقطه از خطی عبارتست از طول خط عمود وارد از آن نقطه

برخط چونکه عمود اقصر خطی است که بتوان از یک نقطه بخطی وصل نمود

قضیهٔ ۲۰

۹۱- چون از نقطهٔ واقعه بر وسط خطی عمودی بر انخط اخراج کنیم اوّلاً هر نقطه از عمود متساوی البعد است از طرفین انخط ثانیاً هر نقطهٔ واقعه در خارج عمود مختلف البعد است از طرفین همان خط



ش ۵۴

از نقطهٔ C وسط خط AB ش ۵۴ عمود ما را بر انخط اخراج میکنیم اوّلاً باید

$AM = BM$

ثابت کرد که هر نقطه M از این عمود بیک فاصله است از دو نقطه A و B یعنی

برهان - چون بفرض $AC = CB$ دو مایل AM و BM متساوی البعد میشوند از C موقع عمود و بنا بر این متساوی میگردند

ثانیاً از نقطهٔ N خارج عمود دو خط AN و BN را بطرفین خط AB وصل میکنیم خط NB عمود را در نقطه P قطع میکند و خط AP را وصل میکنیم آنوقت از مثلث ANP چنین حاصل میشود $AN < NP + AP$ و چون در این نامساوی بجای AP مساویش PB را قرار دهیم چنین میشود $AN < NP + PB$ و یا $AN < NB$

۹۲- بالعکس از قضیهٔ فوق چنین نتیجه میشود که هر نقطهٔ که متساوی البعد باشد از طرفین

خطی واقع میشود بر عمود وارد بر وسط آنخط زیرا که اگر این نقطه روی عمود واقع نشود لازم میآید که از طرفین انخط متساوی البعد باشد این خاصیت را مستقیماً نیز میتوان اثبات نمود فرض میکنیم نقطهٔ M متساوی البعد باشد از دو نقطه A و B ش ۵۲ خطوط AM و BM و CM را وصل میکنیم چون مثلث AMB متساوی الساقین است خط MC وصل از راس بر وسط قاعده عمود میشود بر آن قاعده بنابراین نقطه M واقع شود روی عمود وارد بر وسط AB

۹۲- **تعریف** – در هندسه مسطحه مکان هندسی عبارت است از خطی (مستقیم یا منحنی) که جمیع نقاط آن دارای یک خاصیت مشترکه باشند و در نقاط خارج آنخط مثلاً خاصیت جمیع نقاط عمود بر وسط خطی آنست که بیک فاصله باشند از طرفین انخط بنابراین قضیهٔ فوق را میتوان چنین تقریر نمود

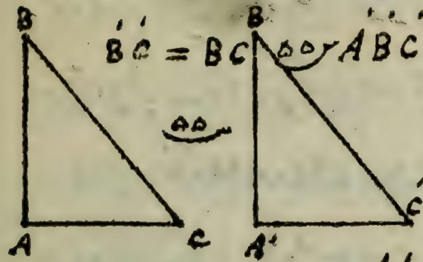
مکان هندسی نقاط متساوی البعد از طرفین خطی عبارتست از عمود وارد بر وسط آن خط

۸ – حالات تساوی مثلثات قائم الزوایا

قضیهٔ ۲۱

۹۴- هرگاه در دو مثلث قائم الزاویه وتر و یک زاویهٔ حادّه

متساوی باشند آن دو مثلث متساوی هستند



فرض میکنیم در دو مثلث ABC و A'B'C' س ۵۵ B'C' = BC

C' = C گوئیم این دو مثلث متساویند

برهان ــ مثلث A'B'C' را نقل

میکنیم بر مثلث ABC بطریقی که وتر B'C' واقع شود بر مساویش وتر BC

و نقطهٔ B' بر B و نقطهٔ C' بر C و چون زاویهٔ C' بفرض مساویست با زاویهٔ

C ضلع A'C' واقع میشود بر استقامت CA و ضلع B'A' عمود بر A'C' واقع

میشود بر BA که از نقطهٔ B عمود است بر AC (زیرا که از یک نقطه B

بیش از یک عمود نمیتوان بر AC فرود آورد) و چون نقطهٔ A' میبایست

یک مرتبه واقع شود بر دو خط CA و BA پس واقع خواهد شد بر فصل مشترک آنها

A و آنوقت دو مثلث درست بر یکدیگر منطبق میشوند و متساوی میگردند

قضیهٔ ۲۲

۹۵ــ هرگاه در دو مثلث قائم الزاویه وتر و یک ضلع

متساوی باشند آن دو مثلث متساوی هستند

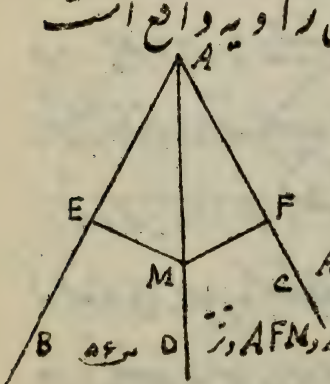
فرض میکنیم در دو مثلث قائم الزاویهٔ ABC و A'B'C' س ۵۵ C'B' = CB

و $AB = A'B'$ گوئیم این دو مثلث متساویند

برهان ــ مثلث $A'B'C'$ را نقل میکنیم بر مثلث ABC بروجهی که ضلع $A'B'$ منطبق شود بر مساویش AB و نقطه A' بر A و نقطه B بر B' و چون زوایای A و A' قائمه اند ضلع $A'C'$ واقع میشود بر استقامت AC و نقطه C بر C' والا لازم میآید که دو مایل BC و $B'C'$ از موقع عمود AB مختلف البعد گشته غیر متساوی باشند و این خلاف فرض است پس دو مثلث درست بریکدیگر منطبق میشوند متساوی میگردند

قضیه ۲۳

۹۶ ــ در هر زاویه هر نقطه از خط منصف الزاویه متساوی البعد است از ضلعین زاویه و بالعکس هر نقطه واقعه در درون زاویه و متساوی البعد از ضلعین آن زاویه واقع است برخط منصف الزاویه



از نقطه M از خط AD منصف الزاویه BAC س ۶۵ دو عمود ME و MF را مرتباً بر ضلعین AB و AC فرود میآوریم در دو مثلث قائم الزاویه AEM و AFM وتر AM در هر دو مشترک است و دو زاویه حاده EAM و FAM بفرض متساویند

پس این دو مثلث متساوی میگردند و بنابراین ME و MF متساوی میشوند
یعنی نقطهٔ M متساوی البعد است از ضلعین زاویهٔ مفروضه
بالعکس فرض میکنیم نقطه M واقعه در درون زاویه BAC متساوی البعد باشد
از ضلعین زاویه یعنی دو عمود ME و MF وارده از M بر ضلعین AB
و AC متساوی باشند در دو مثلث قائم الزاویهٔ AEM و AFM و AM در هر دو
مشترک است و بفرض ME = MF پس این دو مثلث متساوی میشوند و زاویه EAM
مساوی میشود با زاویه FAM بنابراین نقطه M متعلق است بمنصف الزاویه BAC

۹۷- تبصره ۱- چون در قضیهٔ فوق حکم مستقیم و عکس هر دو محقق شدند
مخالفشان نیز محقق خواهد بود یعنی هر نقطهٔ واقعه در خارج منصف الزاویه
غیر متساوی البعد است از ضلعین آن زاویه

۹۸- تبصرهٔ ۲- چون جمیع نقاط خط منصف الزاویه تنها نقاطی هستند در درون
مثلث که متساوی البعد باشند از ضلعین آن زاویه پس قضیه فوق را بطریق ذیل
نیز میتوان بیان نمود خط منصف الزاویه مکان هندسی نقاطی است
که متساوی البعد باشند از ضلعین آن زاویه

۹۹- نتیجه- مکان هندسی نقاط متساوی البعد از دو خط متقاطع مرکب است

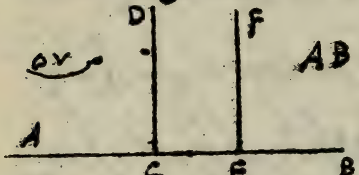
از دو خط منصف الزاویهٔ چهار زاویهٔ حادثه مابین آن دو خط و این دو خط منصف الزاویه عمود بر یکدیگر زیرا که زاویهٔ مابین آنها نصف دو زاویهٔ قائمه است

۹ — خطوط متوازیه

۱۰۰ — **تعریف** — دو خط واقع در یک سطح را متوازی گویند هرگاه از هیچ جهت متلاقی نشوند هرچند در جهتین بینهایت امتداد داده شوند

قضیهٔ ۲۴

۱۰۱ — دو خط عمود بر خط ثالث متوازی هستند

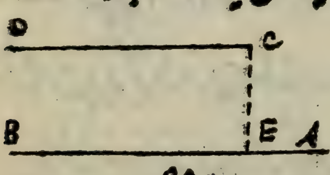


ص ۵۷

برهان — دو خط CD و EF عمود بر AB نتوانند متلاقی شوند چونکه از یک نقطه نمیتوان بیش از یک عمود بر خطی فرود آورد پس آن دو خط متوازی میشوند

قضیهٔ ۲۵

۱۰۲ — از نقطهٔ واقعه در خارج خطی میتوان یک خط بموازات آن خط مرور داد



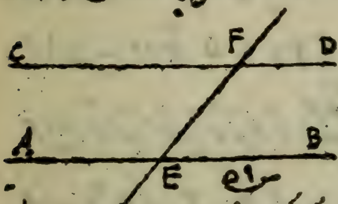
ص ۵۸

نقطه C و خط AB مفروض است ص ۵۸ از نقطهٔ C عمود CE را بر AB فرود میآوریم و بعد از همان نقطه C عمود CD را بر CE اخراج میکنیم پس بموجب قضیهٔ فوق

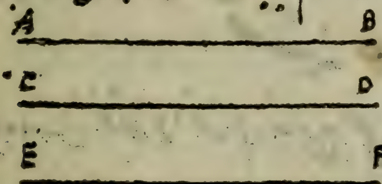
دو خط AB و CD عمود بر خط CE متوازی میگردند

۱۰۳ـ **حکم** ـ از نقطه مفروضه در خارج خطی نمیتوان بیش از یک خط بموازات آن خط مرور داد و این حکم که استدلالش محال و به حکم اقلیدس معروف است از علوم متعارفه و بدیهیات محسوب میشود و در نزد علمای ریاضی بدیهی است و از آن حکم چنین استنباط میشود که هر خطی که از نقطه C موافق هر قاعده بموازات AB رسم شود مختلط میگردد با CD س ۵۸

۱۰۴ـ **نتیجه ۱** ـ هرگاه دو خط AB و CD متوازی باشند س ۵۹ و خط EF



قطع کند یکی از آن دو مثلاً CD را در F باید دیگری را نیز قطع کند زیرا که اگر EF ملاقی نکند AB را با آن موازی میشود و آنوقت لازم میآید که از نقطه F بتوان دو خط بموازات AB مرور داد و این محال است

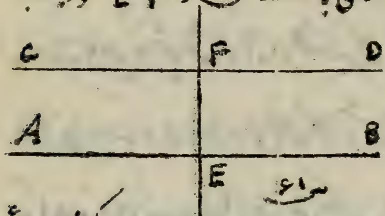


۱۰۵ـ **نتیجه ۲** ـ دو خط موازی با خط ثالث با یکدیگر متوازی هستند ـ دو خط AB و CD موازی با خط EF نتوانند متلاقی شوند زیرا که از یک نقطه نمیتوان بیش از یک موازی با EF مرور داد پس آن دو خط متوازی هستند

قضیه ۲۶

۱۰۶ – هرگاه دو خط متوازی باشند و خطی عمود شود بر یکی عمود میشود بر دیگری

فرض میکنیم دو خط AB و CD متوازی باشند س ۶۱ و EF عمود باشد بر AB



گوئیم EF عمود است بر CD اولاً

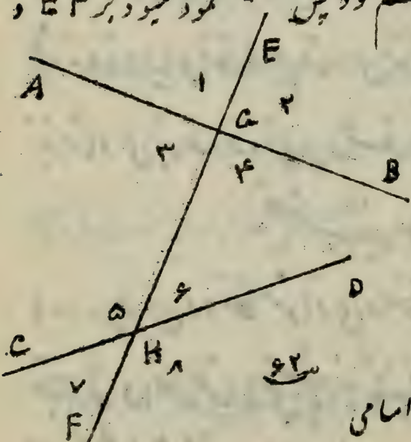
EF باید تلاقی نماید CD را

و بعد اگر از نقطه F محل تلاقی EF و CD عمودی بر EF اخراج کنیم این عمود

موازی میشود با AB و بنابراین منطبق میگردد بر CD زیرا که از نقطه F بیش از

یک خط نمیتوان بموازات AB رسم نمود پس CD عمود میشود بر EF و

بالعکس EF نیز عمود میشود بر CD



۱۰۷ – تعاریف – هرگاه دو خط AB و CD را خط ثالث EF قطع کند س ۶۳ هشت زاویه حول دو نقطه فصل مشترک G و H احداث میشود که اسامی مخصوص دارند چهار زاویه ۳ و ۴ و ۵ و ۶ را در قسمت مابین AB و CD را زوایای داخله گوئیم و چهار زاویه دیگر را خارجه و دو زاویه داخله و غیر مجاوره ۴ و ۵ یا ۳

دو زاویه که در یک سمت قاطع واقع شده اند متبادله داخله گوئیم دو زاویهٔ

خارجه و غیر مجاوره ۲ و ۷ و یا ۱ و ۸ را که در طرفین قاطع واقع شده اند

متبادلهٔ خارجه گوئیم و دو زاویهٔ داخله و خارجه ۶ و ۲ و یا ۴ و ۸ را که در یک

سمت قاطع واقع شده اند و غیر مجاوره اند متقابله گوئیم و دو زاویهٔ داخله

۴ و ۶ و یا ۳ و ۵ را دو داخلهٔ در یک سمت قاطع گوئیم و دو زاویهٔ خارجه

۲ و ۸ و یا ۱ و ۷ را خارجه در یک سمت قاطع

۱۰۸ - تبصرهٔ میتوان بلا واسطه ملتفت شد که هرگاه مثلاً دو زاویهٔ متبادلهٔ

داخله متساوی باشند بالطبع دو زاویهٔ متبادلهٔ داخلهٔ دیگر نیز متساوی

میشوند و زوایای متقابله هم متساوی میشوند و همچنین زوایای متبادلهٔ خارجه

نیز متساوی میشوند و زوایای داخلهٔ در یک سمت قاطع مکمل یکدیگر میگردند

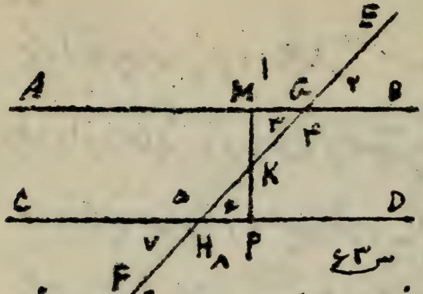
قضیه ۲۷

۱۰۹ - چون دو خط متوازی را خط ثالثی قطع کند اولاً دو زاویهٔ

متبادلهٔ داخله متساوی باشند ثانیاً دو زاویهٔ متبادلهٔ خارجه

متساوی باشند ثالثاً دو زاویهٔ خارجه و داخلهٔ متقابله متساوی باشند

رابعاً دو زاویهٔ داخله یا خارجه واقعه در یک سمت قاطع مکمل یکدیگرند



دو متوازی AB و CD را خط EF در دو نقطهٔ G و H قطع کرده است

مبحث ۳ کافیست (نمره ۱۰۸۵) که

ثابت کنیم دو زاویهٔ متبادلهٔ داخله AGH و GHD متساوی هستند

برهان ـ از نقطهٔ K وسط GH عمود KM را بر AB فرود میآوریم KP امتداد این خط نیز عمود میشود بر CD که موازی است با AB دو مثلث قائم الزاویه KMG و KPH متساوی میشوند چونکه دو وتر KG و KH متساوی هستند بعلاوه دو زاویه متقابله براس MKG و PKH نیز متساویند و از متساوی این دو مثلث دو زاویهٔ متبادله داخله AGH و DHG متساوی میشوند (و محض اختصار زوایا را باعداد نموده گوئیم دو زاویهٔ متبادلهٔ داخله ۳ و ۶ متساوی میشوند)

و دو زاویهٔ متبادلهٔ داخلهٔ دیگر ۴ و ۵ نیز که مکمل دو زاویهٔ متبادلهٔ داخله ۳ و ۶ باشند متساوی میگردند

و دو زاویهٔ متبادلهٔ خارجه ۲ و ۷ متساوی هستند چونکه متقابله براس هستند با دو زاویهٔ متبادلهٔ داخله متساویه ۳ و ۶

و دو زاویهٔ متبادلهٔ خارجه دیگر ۱ و ۸ نیز متساویند چونکه مکمل دو زاویهٔ

متبادلهٔ خارجه متساویه ۲ و ۷ هستند

و دو زاویهٔ متقابله ۲ و ۶ متساوی هستند چونکه هر دو مساویند با زاویهٔ ۳

و دو زاویهٔ متقابله ا و ۵ نیز متساویند چونکه هر دو مساوی هستند با زاویه ۴

و همچنین دو زاویهٔ داخله ۴ و ۶ واقعه در یکسمت قاطع مکمل یکدیگرند چونکه زاویه ۴

مکمل زاویه ۲ است و زاویهٔ ۳ مساوی است با زاویهٔ ۶ پس ۴ و ۶ مکمل یکدیگر

هستند و همینطور ثابت میکنیم که دو زاویهٔ ۳ و ۵ مکمل یکدیگرند

۱۱۰ـ تبصره ـ کلیّة وقتیکه دو خط متوازی را خطّ ثالثی قطع کند ۴ زاویه حادّه

متساوی میشوند و همچنین ۴ زاویهٔ منفرجه نیز متساوی هستند و هر زاویهٔ حادّه

حادّه مکمل هر زاویهٔ منفرجه است

۱۱۱ـ نتیجه ـ هرگاه یکی از هشت زاویه قائمه باشد زوایای دیگر نیز قائمه میشوند

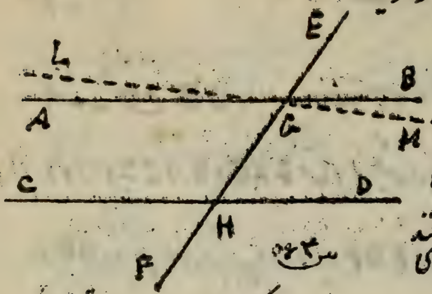
قضیّهٔ ۲۸ (عکس قضیّهٔ فوق)

۱۱۲ـ هرگاه دو خطّ را خطّ ثالثی قطع کند بطوریکه دو زاویهٔ متبادلهٔ داخله

متساوی شوند یا دو زاویه متبادلهٔ خارجه یا دو زاویه خارجه و داخلهٔ متقابله

متساوی شوند و یا دو زاویه داخله و یا دو زاویه خارجهٔ حادثه در یک سمت

قاطع مکمل یکدیگر باشند آن دو خط متوازی هستند



ش ۴۳

فرض میکنیم دو زاویهٔ متبادلهٔ داخلهٔ AGH
و GHD حادثه از دو خط AB و CD وخط
EF متساوی باشند گوئیم AB و CD متوازی هستند

برهان ـ چون از نقطهٔ G خط GM را موازات CD رسم کنیم آنوقت بموجب قضیهٔ فوق زاویهٔ HGM متساوی خواهد شد با زاویهٔ GHD چون متبادلهٔ داخله اند و بنا بفرض $\widehat{AGH} = \widehat{GHD}$ پس دو زاویهٔ HGM و AGH متساوی میگردند و چون هر دو در یک سمت ضلع مشترک GH واقعند پس GM منطبق میشود بر GA و دو خط AB و CD متوازی میگردند و سایر حالات قضیه نیز بهمین وجه ثابت میشود

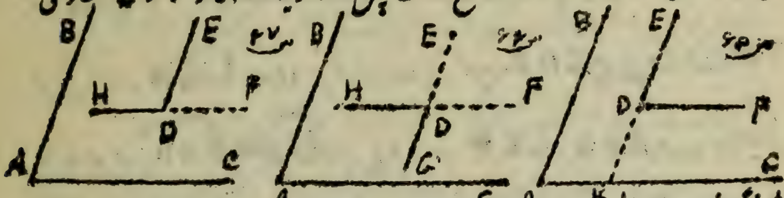
۱۱۴ ـ تبصرهٔ ـ محض سهولت اثبات قضیه دو خط GM و GA را متمایز نموده ایم

قضیهٔ ۲۹

۱۱۴ ـ هرگاه اضلاع دو زاویه متوازی باشند آن دو زاویه متساوی هستند یا مکمل اند یعنی اگر اضلاع دو زاویه دو بدو ممتد در یک جهة یا دو بدو ممتد در دو جهة مخالف باشند آن دو زاویه متساوی هستند و اگر دو ضلع متوازی ممتد در یک جهة و دو ضلع دیگر ممتد در دو جهة مخالف باشند آن دو زاویه مکمل اند

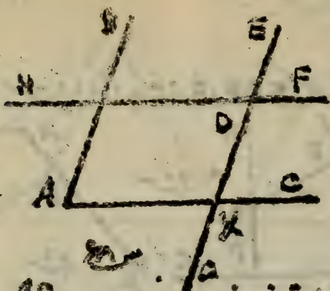
اولا فرض میکنیم اضلاع دو زاویهٔ BAC و EDF دو بدو متوازی و ممتد در یک جهة

باشند چون DE را امتداد میدهیم تا AC را در نقطه K ملاقی کند دو زاویهٔ BAC و DKC متساوی میشوند چونکه متقابله اند نسبت به دو متوازی AB و DE و قاطع AC و همچنین دو زاویه EDF و DKC نیز متساوی میشوند چونکه متقابله اند نسبت به دو متوازی DF و AC و قاطع EK پس دو زاویه BAC و EDF متساوی هستند



ثانیاً اضلاع دو زاویه BAC و HDG متوازی و در دو جهت مخالف ممتدند ش ۶۶ و چون HD و DG را از آنطرف D امتداد دهیم دو زاویهٔ متقابله برأس HDG و EDF متساوی میشوند و چون اضلاع دو زاویهٔ EDF و BAC متوازی و ممتد در یک جهت اند بنا بحکم اول این دو زاویه متساوی میشوند پس دو زاویهٔ BAC و HDG متساوی هستند

ثالثاً در دو زاویهٔ BAC و EDH اضلاع متوازیه AB و DE در یک جهت ممتدند و اضلاع متوازیه AC و DH در دو جهت مخالف ش ۶۷ و چون DH را از طرف D امتداد دهیم دو زاویهٔ EDF و BAC متساوی میشوند چونکه بنا بحکم اول اضلاعشان متوازی و ممتد در یک جهت اند و اما زاویهٔ EDF مکمل زاویهٔ HDE است پس دو زاویهٔ HDE و BAC مکمل هستند



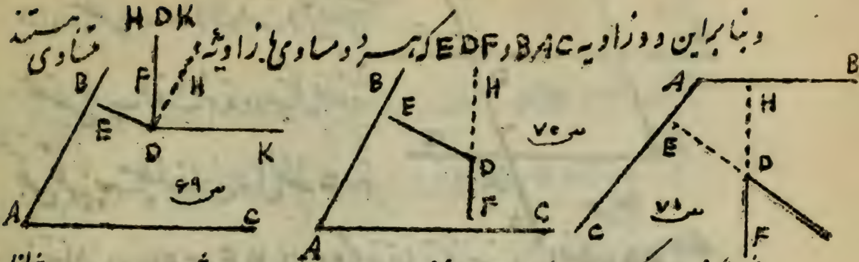
۱۱۵- تبصره — حالات قضیه فوق برای اینکه
محصلین خوب ملتفت شوند در شکل نموده شده
لکن ممکن است چهار زاویه حول نقطه D حادث
از تقاطع دو خط GE و HF را بر حسب که تقریبا متوازیند با اضلاع AB و AC
زاویه BAC سنجید و حالات قضیه فوق را اثبات نمود

قضیه ۳۰

۱۱۶- هرگاه اضلاع دو زاویه عمود باشند بر همدیگر آنها دو زاویه متساوی هستند یا مکمل یعنی اگر دو زاویه هر دو حاده یا منفرجه باشند متساوی میشوند و اگر یکی حاده باشد و دیگری منفرجه مکمل یکدیگرند

اولاً فرض میکنیم دو زاویه BAC و EDF حاده باشند ضلع DE و DF مرتبا عمود باشند بر AB و AC و از نقطه D دو خط DH و DK را مرتبا بموازات AB و AC رسم میکنیم دو زاویه HDK و CAB متساوی میشوند (نمره ۱۱۴) خط DH موازی AB عمود شود بر DE پس زاویه FDH متمم زاویه EDF است خط DK موازی AC عمود میشود بر DF پس زاویه FDH متمم زاویه HDK است چون دو زاویه EDF و HDK دارای یک متمم FDH هستند متساوی میگردند

و بنابراین دو زاویهٔ BAC و EDF که هر دو مساوی یک زاویه‌اند مساوی هستند



ثانیاً فرض میکنیم زاویهٔ EDF منفرجه و زاویهٔ BAC حاده باشد سر ۷۰ و اضلاع شان

عمود بر یکدیگر و چون DF را از آنطرف D امتداد دهیم زاویهٔ حادهٔ EDH

بنا بحالت اول مساوی میشود با زاویهٔ BAC و چون زاویهٔ EDH مکمل زاویهٔ EDF است

پس مساویش زاویهٔ BAC نیز مکمل زاویهٔ EDF هست

ثالثاً اضلاع دو زاویهٔ منفرجهٔ مفروضهٔ CAB و EDF عمودند بر همدیگر سر ۷۱

چون ضلع DF را از آنطرف D امتداد دهیم زاویهٔ حادهٔ EDH بنا بحالت

دوم مکمل زاویهٔ منفرجهٔ CAB میشود و چون این زاویه مکمل زاویهٔ EDF نیز هست

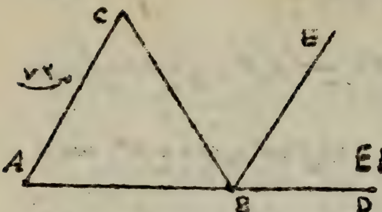
پس دو زاویهٔ BAC و EDF مساوی میگردند

۱۰ــ مجموع زوایای مثلث و کثیر الاضلاع محدب

قضیهٔ ۱۳

۱۱۲ــ مجموع زوایای هر مثلث مساویست با دو زاویهٔ قائمه

مثلث ABC مفروض است سر ۷۲ ضلع AB را امتداد میدهیم و از نقطهٔ B خط



BE را موازات AC در جهة آن رسم میکنیم
زاویهٔ A از مثلث مساوی میشود با زاویهٔ EBD
چون متقابله اند نسبت بدو متوازی AC و BE و قاطع AB و همچنین زاویهٔ C
از مثلث مساوی است با زاویه CBE چون متبادله داخله اند نسبت بدو
متوازی AC و BE و قاطع CB و زاویهٔ CBA عبارتست از زاویهٔ B از
مثلث پس مجموع زوایای مثلث مساوی میشود با مجموع سه زاویهٔ متوالیه DBE و
CBE و ABC حادثه در حول نقطه B در یک سمت خط ABD و این مجموع مساویست با
دو زاویه قائمه پس مجموع سه زاویهٔ مثلث نیز مساوی است با دو زاویهٔ قائمه

۱۱۸ - نتیجه ۱ - زاویهٔ خارجه مثلث یعنی زاویهٔ حادثه مابین یک ضلع و امتداد
ضلع دیگر از مثلث مساوی است با مجموع دو زاویه داخله مثلث که مجاور آن نباشند
مثل زاویهٔ CBD که مساوی است با مجموع دو زاویه A و C ص ۷۲

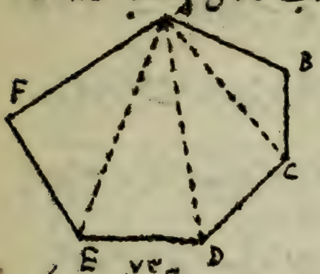
۱۱۹ - نتیجه ۲ - هرگاه در دو مثلث دو زاویه نظیر بنظیر متساوی باشند زاویهٔ سوم آنها نیز متساوی میشوند

۱۲۰ - نتیجه ۳ - در مثلث ممکن نیست بیش از یک زاویهٔ قائمه یا منفرجه موجود باشد

۱۲۱ - نتیجه ۴ - در مثلث قائم الزاویه دو زاویهٔ حاده متمم یکدیگرند

قضیهٔ ۳۲

۱۲۲- مجموع زوایای داخلهٔ هر کثیر الاضلاع محدّب مساوی است بآنقدر دو قائمه



که عددِ اضلاع باشد منهای دو

برهان- کثیر الاضلاع محدّب ABCDEF

مفروض است ش ۷۳ از رأس A اقطار AC و

AD را بر دو سر غیر مجاور وصل میکنیم کثیر الاضلاع منقسم میشود بآنقدر مثلثات که

عددِ اضلاع باشد منهای دو زیراکه هر کدام از این مثلثات شامل یک ضلع از کثیر الاضلاع است

غیر از دو مثلث طرفین ABC و AFE که شامل دو ضلع از کثیر الاضلاع است

و چون مجموع زوایای کثیر الاضلاع برابر است با مجموع زوایای مثلثات

پس مجموع زوایای کثیر الاضلاع مساویست بآنقدر دو قائمه که عددِ مثلثات باشد یعنی بآنقدر

دو قائمه که عددِ اضلاع کثیر الاضلاع باشد منهای دو

و چون عدد اضلاع کثیر الاضلاع را n فرض کنیم مجموع زوایای کثیر الاضلاع

میشود $(n-2)2$ یا $2n-4$ قائمه

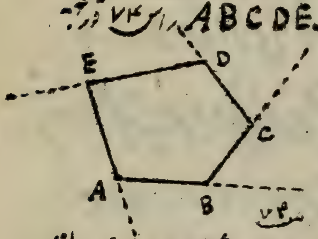
و مخصوصاً مجموع هر چهار زاویهٔ ذو اربعه اضلاع محدّب مساویست با چهار زاویهٔ قائمه

قضیّه ۳۳

۱۲۳- چون جمیع اضلاع هر کثیر الاضلاع محدّبی را از یک جهة امتداد دهیم

مجموع زوایای خارجه که حادث شود مساویست با چهار زاویهٔ قائمه

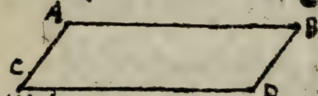
برهان — چون جمیع اضلاع کثیرالاضلاع محدب ABCDE را (س ۷۴) ترتیباً



امتداد دهیم هر دو زاویهٔ خارجه و داخله حادثه در حول هر راس مساویست با دو زاویهٔ قائمه پس اگر عدد اضلاع کثیرالاضلاع را n فرض کنیم مجموع جمیع زوایای خارجه و داخله میشود $2n$ قائمه و چون مجموع زوایای داخله مساویست با $2n - 4$ قائمه پس مجموع زوایای خارجه میشود ۴ قائمه یعنی فضل $2n$ قائمه است بر $(2n - 4)$ قائمه

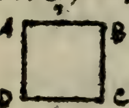
۱۱— متوازی الاضلاع

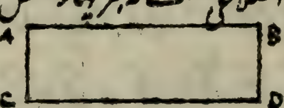
۱۲۴— تعریفات— متوازی الاضلاع عبارتست از ذوار بعه اضلاعی که اضلاع متقابله اش دو بدو مساوی باشند س ۷۵



۱۲۵— مربع مستطیل عبارتست از متوازی الاضلاعی که هر چهار زاویه اش قائمه باشند

۱۲۶— مربع ذوار بعه اضلاعی است که هر چهار ضلعش مساوی و هر چهار زاویه اش قائمه باشد س ۷۷



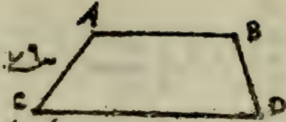


۱۲۷— لوزی متوازی الاضلاعی است که هر چهار ضلعش مساوی باشند س ۷۸

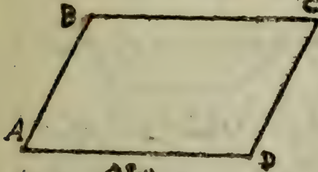
۱۲۸— ذوذنقه ذوار بعه اضلاعی است که دو ضلع آن فقط متوازی باشند س ۷۹



قضیهٔ ۳۴



۱۲۹- در متوازی الاضلاع هر دو زاویهٔ متقابله متساوی باشند و همچنین هر دو زاویهٔ متوالیه مکمل یکدیگرند



برهان — در متوازی الاضلاع ABCD (ص ۸۰) چون اضلاع دو زاویهٔ متقابله A و C متوازیند و ممتد در دو جهت مخالف پس این دو زاویه متساوی میشوند و بهمین دلیل دو زاویهٔ متقابلهٔ B و D نیز متساوی باشند

و دو زاویهٔ متوالیه A و D مثلاً مکمل یکدیگرند زیرا که این دو زاویه داخله اند حادثه در یک سمت قاطع AD نسبت بدو متوازی AB و CD

۱۳۰ — نتیجه — هرگاه در متوازی الاضلاع یک زاویه قائمه باشد سه زاویهٔ دیگر نیز قائمه میشوند و بنابراین در شکل مستطیل و مربع هر چهار زاویه قائمه اند

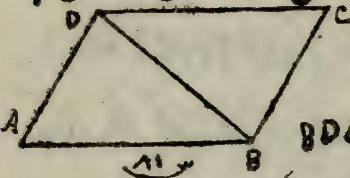
۱۳۱- عکس قضیه- هرگاه در ذو اربعه اضلاع محدبی هر دو زاویهٔ متقابله متساوی باشند آن شکل متوازی الاضلاع است — فرض میکنیم در ذو اربعه اضلاع ABCD (ص ۸۰) $\hat{A} = \hat{C}$ و $\hat{B} = \hat{D}$ و چون مجموع چهار زاویهٔ A و B و C و D مساویست با چهار زاویه قائمه پس (ربع) دو زاویهٔ A و D مساوی خواهد شد با دو زاویهٔ قائمه و چون این دو زاویه مکمل A و D داخله اند حادثه در یک سمت نسبت بدو خط AB و DC و قاطع AD پس

دو خط AB و CD متوازی میشوند و بهمین دلیل ثابت میکنیم که AD و BC نیز متساوی هستند
پس شکل ABCD متوازی الاضلاع است

۱۳۱- نتیجه - هرگاه چهار زاویه ذوارجه اضلاعی قائمه باشند آن شکل مستطیل است

قضیه ۳۵

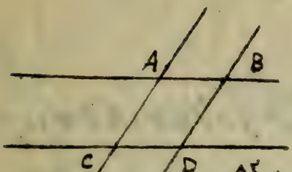
۱۳۲- در متوازی الاضلاع هر دو ضلع متقابل متساوی باشند



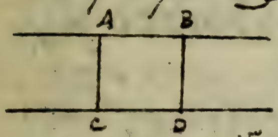
برهان - در متوازی الاضلاع ABCD قطر BD را رسم میکنیم ص۸۱ در دو مثلث BDA و BDC
دو زاویه و ضلع بینهما متساوی هستند یعنی BD مشترک است و دو زاویه BDC
و ABD متساویند چون متبادله داخله اند نسبت به متوازی DC و BA و قاطع BD
و دو زاویه ADB و DBC نیز متساویند بهمان دلیل پس دو مثلث متساوی میشوند و ضلع
AB مساویست به CD و ضلع AD مساویست به BC

۱۳۳- نتیجه ۱- هرگاه در متوازی الاضلاع دو ضلع متوالی متساوی باشند
هر چهار ضلع متساوی میشوند و آن شکل لوزی است

۱۳۴- نتیجه ۲- قطعات متوازیه محصوره مابین دو خط متوازی متساوی هستند
فرض میکنیم دو خط متوازی AB و CD را دو قطعه خط متوازیه AC و BD قطع کرده باشند



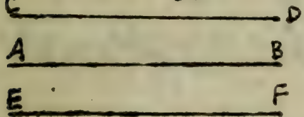
ش ۸۲



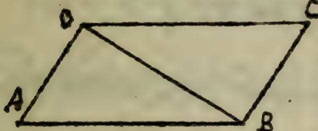
ش ۸۳

چون شکل ABCD (ش ۸۲) متوازی الاضلاع است پس AC و BD متساوی میشوند و علاوه براین اگر AC و BD عمود باشند بر دو متوازی AB و CD (ش ۸۳) فواصل نقاط A و B از خط CD متساوی میشوند بنابراین گوئیم فاصله دو خط متوازی بهمه جا یکی است

۱۲۵- نتیجه ۲- مکان هندسی نقاطی که بیک فاصله باشند از خط AB عبارت است از دو خط CD و EF (ش ۸۴) که بموازات AB در طرفین آن واقع گردند



۱۲۶- عکس قضیه فوق- هرگاه در ذو اربعه اضلاع محدبی اضلاع متقابل متساوی باشند آن شکل متوازی الاضلاع است- در ذو



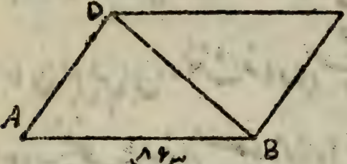
ش ۸۵

اربعه اضلاع ABCD (ش ۸۵) فرض میکنیم $AB = DC$ و $AD = BC$ قطر BD را وصل میکنیم در دو مثلث ABD و BCD سه ضلع نظیر بنظیر متساوی هستند یعنی BD مشترک است و بفرض $AB = DC$ و $AD = BC$ پس این دو مثلث متساوی میگردند و زاویه ABD مساوی میشود با زاویه BDC و همچنین زاویه ADB مساوی میشود با زاویه CBD و چون دو زاویه متساوی ABD و BDC متبادله داخله اند نسبت بدو خط AB و CD و قاطع BD پس AB و CD متوازی میشوند و همینطور از تساوی دو زاویه

DBC و ADB دو خط BC و AD نیز متوازی میشوند پس شکل ABCD متوازی الاضلاع است

قضیّهٔ ۳۶

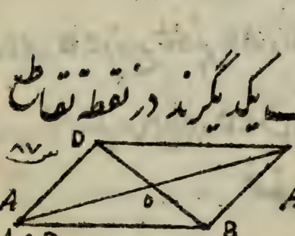
۱۳۷- هرگاه دو ذو اربعه اضلاع محدبی دو ضلع مقابل متساوی و متوازی باشند آن شکل متوازی الاضلاع است



فرض میکنیم در ذو اربعه اضلاع ABCD س ۸۶ ضلع AB مساوی و موازی باشد با ضلع DC و قطر BD را وصل میکنیم در دو مثلث ABD و DBC دو ضلع و زاویه بینهما متساوی هستند یعنی BD مشترک است و AB مساوی است با DC بفرض و دو زاویه ABD و BDC نیز متساویند چون متبادله داخله اند نسبت بدو متوازی AB و CD و قاطع BD پس این دو مثلث متساوی میگردند AD=BC و زاویه ADB مساوی میشود با زاویه DBC و چون این دو زاویه متبادله داخله اند نسبت بدو خط AD و BC و قاطع BD پس AD و BC متوازی میشوند و شکل ABCD متوازی الاضلاع است

قضیّهٔ ۳۷

۱۳۸- دو قطر متوازی الاضلاع منصّف یکدیگرند در نقطه تقاطع

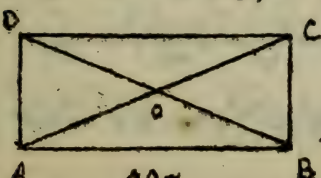


برهان- در متوازی الاضلاع مفروض ABCD قطر AC و BD را وصل میکنیم تا در نقطه O متقاطع شوند س ۸۷ و در دو مثلث AOB

و DOC دو زاویه و ضلع بینهما مساوی هستند یعنی AB = CD چون اضلاع متقابله
متوازی الاضلاع هستند دو زاویه OBA و DCO مساویند چون متبادله و اضلاع
نسبت به دو متوازی AB و CD و قاطع DB و دو زاویه OAB و OCD نیز مساویند
بهمان دلیل پس این دو مثلث مساوی میگردند و OB مساوی با OD و OC مساوی میشود با OA

۱۳۹ — نتیجه — در مربع مستطیل و لوزی و مربع نیز دو قطر منصف یکدیگرند در نقطه تقاطع

۱۴۰ — عکس قضیه — هرگاه دو قطر ذو اربعه اضلاع محدبی منصف یکدیگر
باشند در نقطه تقاطع آن شکل متوازی الاضلاع است — فرض میکنیم در ذو اربعه
اضلاع ABCD دو قطر AC و BD منصف یکدیگر باشند در نقطه O س ۸۷ دو دو مثلث AOB
و DOC دو ضلع و زاویه بینها مساوی هستند یعنی OC = OA و OD = OB بفرض و زاویه
AOB مساویست با زاویه COD چون متقابله براسند پس این دو مثلث مساوی میشوند و
AB = CD و زاویه OAB مساوی میشود با زاویه OCD و چون این دو زاویه متساویه متبادله داخله اند نسبت به
خط AB و CD و قاطع AC پس AB و CD متوازی میشوند و بنابراین در ذو اربعه اضلاع ABCD
چون دو ضلع مقابل AB و CD مساوی و متوازی هستند پس آن شکل متوازی الاضلاع است



س ۸۸

قضیه ۳۸

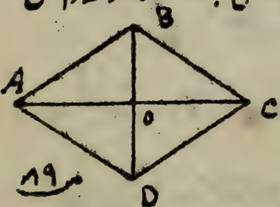
۱۴۱ — در مربع مستطیل دو قطر مساوی هستند

درمربع مستطیل مفروض ABCD دو قطر AC و BD را رسم میکنیم ش ۸۸ و در دو مثلث
ABC و ABD دو ضلع و زاویه بینهما متساوی هستند یعنی دو زاویه ABC و DAB متساوی‌اند
چون قائمه اند و ضلع AB مشترک است و BC مساوی است با AD چون اضلاع متقابل مستطیل‌اند
پس این دو مثلث متساوی میگردند و بنابراین دو قطر AC و BD متساوی میشوند

۱۴۲- نتیجه - در مربع دو قطر متساوی هستند

۱۴۳- عکس قضیه - هرگاه در متوازی الاضلاعی دو قطر متساوی باشند
آن شکل مربع مستطیل است - فرض میکنیم در متوازی الاضلاع ABCD دو قطر AC
و BD متساوی باشند ش ۸۸ دو مثلث ABC و ABD متساوی هستند چون در سه ضلع نظیر بنظیر متساوی‌اند
یعنی AB مشترک است و BC مساوی است با AD چون اضلاع متقابل متوازی الاضلاع
باشند و AC مساوی است با BD بفرض پس از تساوی این دو مثلث دو زاویه ABC
و BAD متساوی میشوند و علاوه براین چون این دو زاویه متساویه مکمل‌اند (نمره ۱۰۹)
پس قائمه میشوند بنابراین شکل مفروض مربع مستطیل است

۱۴۴- نتیجه - در هر مثلث قائم الزاویه وسط وتر متساوی البعد است از سه رأس مثلث



ش ۸۹

قضیه ۳۹

۱۴۵- دو قطر لوزی عمودند بر یکدیگر

در لوزی ABCD س ۸۹ دو قطر AC و BD را وصل میکنیم نقطهٔ O محل تلاقی این دو قطر واقعست در وسط AC زیراکه دو قطر لوزی منصف یکدیگرند در نقطهٔ تقاطع و چون مثلث ABC متساوی الساقین است خط BO واصل از رأس B بر وسط قاعده عمود میشود بر این قاعده پس دو قطر AC و BD بر یکدیگر عمود میشوند

۱۴۶ — نتیجه — در مربع دو قطر منصف یکدیگرند در نقطهٔ تقاطع و هم عمودند بر یکدیگر

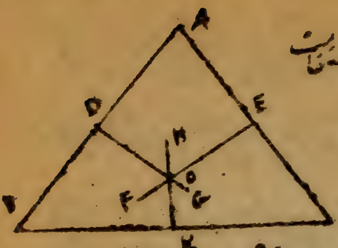
۱۴۷ — عکس قضیه — هرگاه در متوازی الاضلاعی دو قطر عمود باشند بر یکدیگر آن شکل لوزی است — فرض میکنیم در متوازی الاضلاع ABCD س ۸۹ دو قطر AC و BD عمود باشند بر یکدیگر و چون نقطه O محل تلاقی دو قطر واقع است در وسط AC پس دو ضلع متوالی BA و BC متساوی میشوند چون دو مایل اند متساوی البعد از موقع عمود BO بر AC پس شکل مفروض لوزی است

۱۴۸ — نتیجه — هرگاه در ذوات اربعه اضلاع محدّبی دو قطر منصف یکدیگر باشند و هم متساوی و هم عمود بر یکدیگر باشند آن شکل مربع است

* ۱۲ — خواص مختلفه دو مثلث

۱۴۹ — قضیه — عمودهای خارجه از اواسط سه ضلع مثلث در یک نقطه متقاطع میشوند

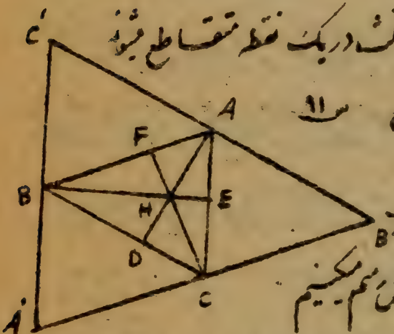
برهان — در مثلث ABC س ۹۰ دو عمود DG و FE خارج از وسط دو ضلع AB



ش ۹۰

و CA چون متوازی نیستند (والا AB و AC بر استقامت خطی واقع شوند و این خلاف فرض است) در یک نقطه O متقاطع میشوند حال باید ثابت نمود که این نقطه متعلق است بعمود خارج از وسط BC پس گوئیم چون نقطه O واقع است در روی عمود DG متساوی البعد است از دو نقطه A و B و چون همین نقطه واقع است در روی عمود EF متساوی البعد است از دو نقطه A و C پس این نقطه متساوی البعد میشود از دو نقطه B و C بنابراین متعلق باشد بعمود خارج از وسط ضلع BC

۱۵۰ - **قضیه** - سه ارتفاع هر مثلث در یک نقطه متقاطع میشوند



ش ۹۱

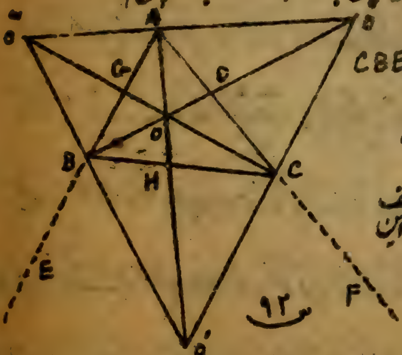
برهان - فرض میکنیم AD و BE و CF سه ارتفاع مثلث مفروض ABC باشند ش ۹۱ از سر راس مثلث خطی بموازات ضلع مقابل رسم میکنیم تا مثلث جدید A′B′C′ تشکیل شود و دو شکل ACBC′ و ABCB′ بنا بعمل متوازی الاضلاع میشوند AC′ و AB′ هر دو مساوی شوند با BC پس نقطه A وسط B′C′ است و چون نیز خط AD عمود است بر ضلع BC عمود میشود بر موازیش B′C′ پس خط AD عمود است بر وسط B′C′ و همینطور ثابت میکنیم که دو ارتفاع دیگر BE و CF مرتباً عمودند بر اوساط A′C′ و A′B′

پس سه خط عمود AD و BE و CF بموجب قضیه سابقه در یک نقطه H متلاقی میشوند

۱۵۲ – **تبصره** – سه راس A و B و C از مثلث و نقطه H محل تلاقی سه ارتفاع چهار نقطه هستند که هر کدام از آنها نقطه تلاقی ارتفاعات مثلثی است که از سه نقطه دیگر تشکیل شود مثلا نقطه A از محل تلاقی ارتفاعات مثلث BCH است

۱۵۳ – **قضیه** – در هر مثلث خطوط منصف هر سه زاویه در یک نقطه متقاطع میشوند و دو منصف دو زاویه خارجه با منصف زاویه سوم داخله نیز در یک نقطه متقاطع میگردند

برهان – اولا در مثلث ABC دو خط منصف زاویه B و C در یک نقطه O در درون مثلث متلاقی میشوند و چون این نقطه واقع است بر منصف زاویه B متساوی البعد است از AB و BC و چون واقع است بر منصف زاویه C متساوی البعد است از AC و BC پس متساوی البعد میشود از AB و AC بنابراین متعلق باشد بمنصف زاویه A پس هر سه منصف در یک نقطه O متقاطع شوند ثانیا مجموع دو زاویه خارجه CBE و BCF (ش ۹۲) چون از چهار قائمه کمتر است پس مجموع منصف شان از دو قائمه کمتر میشود بنابراین منصف این دو زاویه در نقطه O' در درون زاویه A

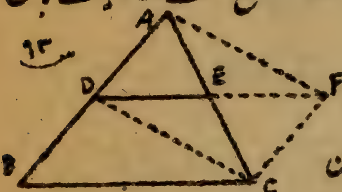


ش ۹۲

متقاطع میشوند و این نقطه مانند حالت سابقه متساوی البعد است از سه ضلع مثلث

پس متعلق باشد به منصف زاویه A و همینطور ثابت میکنیم که دو منصف دو زاویه خارجه دیگر با منصف زاویه B در نقطه O' متقاطع میشوند و همچنین دو منصف دو زاویه خارجه دیگر با منصف زاویه C در نقطه O'' متقاطع میشوند و این چهار نقطه O و O' و O'' و O''' را خاصیتی است که هر کدام بیک فاصله باشد از سه ضلع مثلث

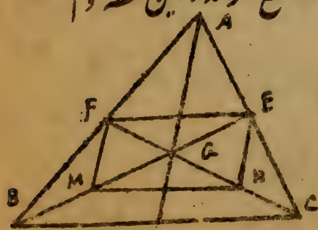
۱۵۳ ـ قضیه ـ خط واصل ما بین اوساط دو ضلع مثلث موازیست با ضلع سوم و مساویست با نصف آن ضلع



ش ۹۳

برهان ـ در مثلث ABC خط DE واصل ما بین D و E وسط AB و AC را بطول EF مساوی DE امتداد میدهیم شکل ADCF متوازی الاضلاع است چونکه دو قطر AC و DF منصف همدیگرند پس CF مساوی و موازی میشود با AD یا BD و بنابراین شکل DBCF متوازی الاضلاع است و DE موازی و مساویست با نصف BC

۱۵۴ ـ قضیه ـ هر سه میانه مثلث بریک نقطه متقاطع شوند و این نقطه واقعست در ثلث هر کدام از آنها ابتدا از قاعدهٔ مقابل

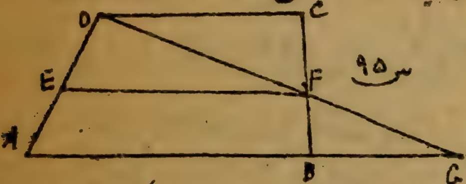


ش ۹۴

برهان ـ در مثلث ABC ش ۹۴ ابتدا فرض میکنیم دو میانه BE و CF در نقطهٔ G متقاطع باشند EF را

وصل میکنیم و از نقطه M وسط BG بنقطه N وسط GC نیز وصل میکنیم خط EF واصل
مابین وسط دو ضلع مثلث ABG موازی و مساوی شود با نصف BG و همچنین MN
واصل مابین وسط دو ضلع مثلث BCG موازی و مساوی شود با نصف BC پس
EF و MN متساوی و متوازی میشوند و شکل EFMN متوازی الاضلاع است و
دو قطر ME و FN منصف یکدیگرند یعنی EG=GM=MB و GF=GN=NC
پس معلوم شد که میانه BE مرور کند بنقطه G واقعه در ثلث CF ابتدا از نقطه F
و بهمین دلیل ثابت میشود که میانه سوم AD مرور کند بهمین نقطه G و در علم جر ثقیل
نقطه تقاطع سه میانه را مرکز ثقل مثلث نامند

۱۵۵ ـ **قضیه** ـ خط واصل مابین منتصف دو ضلع ذوذنقه موازی و مساوی است
با نصف مجموع قاعده‌تین



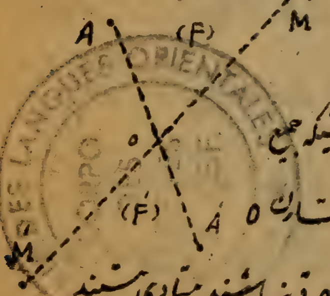
ش ۹۵

برهان ـ در ذوذنقه ABCD
مابین اوساط AD و BC را بخط EF وصل کنیم و خط DF را رسم کنیم تا امتداد
AB را در نقطه G تلاقی کند و دو مثلث CFD و BFG متساوی هستند چونکه دو زاویه و
ضلع بینهما متساویند یعنی BF=CF چون F وسط BC است و زاویه DFC مساوی
با زاویه BFG چون متقابل بر اس‌اند و دو زاویه FCD و FBG نیز متساویند

چون مستقیم ادار داخله اند نسبت بدو متوازی CD و BG وقاطع BC پس DF=FG
و BG=DC و چون در مثلث DAG خط EF واصل است مابین اوساط دو ضلع
DA و DG پس موازیست با قاعده بین دو نقطه و علاوه براین چون EF نصف AG است
پس نصف AB + CD خواهد بود

۱۲- تقارن اشکال

۱۵۶- **تقارن نسبت بیک نقطه**- دو نقطه A و A' را نسبت بنقطه ثابته O قرینه گوییم در صورتیکه نقطه O واقع باشد در وسط خط AA' واصل مابین آن دو نقطه و بنابراین تعریف هرگاه بخواهیم قرینه A را نسبت به O معلوم کنیم OA را وصل کرده باندازهٔ خود تا A' امتداد [illegible] میدهیم پس A' قرینه A خواهد بود و بالعکس A نیز قرینه A' است و نقطه ثابته O را مرکز تقارن گوییم



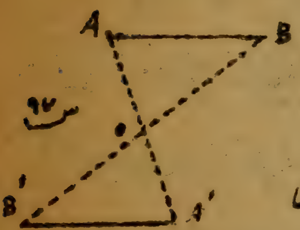
ش ۹۶

دو شکل F و F' را نسبت بنقطه O قرینه یکدیگر گوییم وقتیکه جمیع نقاط یکی ترتیباً قرینهٔ جمیع نقاط دیگری باشند نسبت بمرکز تقارن O

۱۵۷- **قضیه**- دو شکل F و F' که نسبت بنقطه O قرینه باشند متساوی هستند

فرض میکنیم F و F' دو شکل مستوی نسبت به O قرینه باشند دو نقطه A و M از F را اختیار میکنیم و قرینه‌هاشان A' و M' از F' را نسبت به O معلوم میکنیم و چون نیم خط OA را باندازه

دو زاویهٔ قائمه دوران دهیم واقع میشود بر استقامت oA و چون $oA = oA'$
پس نقطهٔ A واقع میگردد بر قرینه اش A' و حال اگر نقطهٔ M را نسبت به A بلاتغییر
تصور کنیم نیم خط oM نیز ضمناً در حول o بقدر دو زاویهٔ قائمه دوران میکند و نقطهٔ M
واقع گردد بر قرینه اش M' و بهمین حالت هر نقطهٔ از F منطبق میشود بر نقطهٔ نظیرش از F'
و بنابراین دو شکل F و F' درست بریکدیگر منطبق میگردند و متساوی میشوند



ش ۹۷

۱۵۸ — دو قطعه خط AB و $A'B'$ که نسبت
به o قرینه باشند متساوی میشوند ش ۹۷ و علاوه
بنابر این دو مثلث متساویه AoB و $A'oB'$ از تساوی
دو زاویهٔ متبادله داخله oAB و $oA'B'$ دو خط AB و $A'B'$ متوازی میگردند
و اما ممتد در دو جهة مخالف



و اگر نقطهٔ o واقع باشد بر خط AB ش ۹۸ آنوقت قرینهٔ قطعه خط AB نسبت به o
عبارتست از قطعه خط مساویش $A'B'$ واقع بر خط غیر محدود AB و ممتد
در جهة مخالف آن



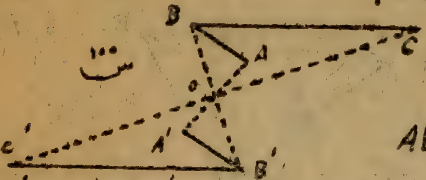
ش ۹۹

و هرگاه نقطهٔ o بر وسط AB باشد ش ۹۹ پس واقع خواهد بود بر وسط $A'B'$
چنانکه A' بر B و B' بر A افتند و باز در این حالت دو قطعه خط AB و $A'B'$

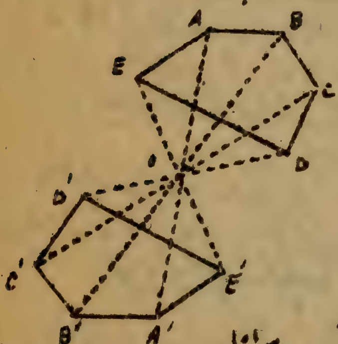
متساوی هستند و ممتد در دو جهت مخالف

۱۵۹ — قرینهٔ هر زاویهٔ ABC (ش ۱۰۰) عبارت است از زاویهٔ A'B'C' که ضلعینش مرتباً موازی و در خلاف جهت ضلعین آن باشند و در این صورت آن دو زاویه متساوی میشوند و ممتد در یک جهت

ش ۱۰۰



۱۶۰ — دو کثیر الاضلاع قرینهٔ ABCDE و A'B'C'D'E' متساوی هستند (ش ۱۰۱) و هر دو ضلع متناظرهٔ شان مثلاً AB و A'B' متساوی و متوازی و ممتد در دو جهت مخالف و اما هر دو زاویهٔ متناظره از آن دو شکل متساویند و ممتد در یک جهت و اضلاعشان متوازی و ممتد در دو جهت مخالف

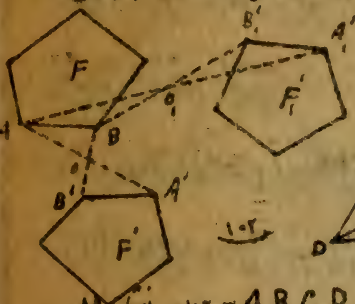


۱۶۱ — تبصره — دو کثیر الاضلاع F' و F'' که نسبت بدو مرکز O و O' قرینهٔ کثیر الاضلاع F باشند متساوی هستند (ش ۱۰۲) چنانکه هر دو ضلع متناظرهٔ شان مثلاً A'B' و A''B'' متساویند و متوازی و ممتد در یک جهت زیرا که این دو ضلع مساوی و متوازیند با ضلع AB از شکل F و هم در جهت مخالف آن ممتدند

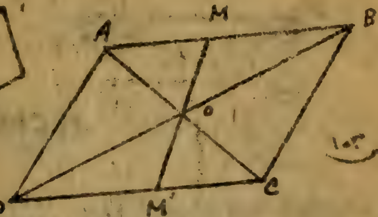
ش ۱۰۱

۱۶۲ — مرکز تقارن یک شکل — هرگاه نقطهٔ M از شکل F قرینهٔ نقطهٔ دیگر

M' باشد از همان شکل نسبت بنقطه o واقعه در سطح آن شکل در آن صورت نقطه o را
مرکز تقارن یا بطور ساده مرکز شکل F نامند مثلاً نقطه تلاقی دو قطر هر متوازی الاضلاع



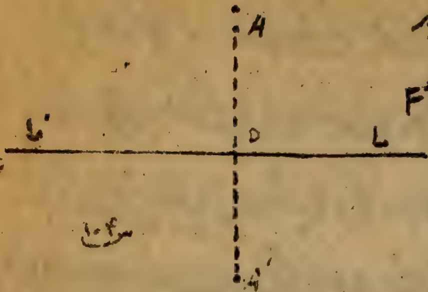
ش ۱۰۲



ش ۱۰۳

مرکز آن شکل است مثلاً در متوازی الاضلاع ABCD ش ۱۰۳ نقطه M
بر ضلع AB اختیار کرده oM را وصل نکنیم و امتدادش میدهیم تا CD را
در M' قطع کند و آن وقت از تساوی دو مثلث AoM و CoM' که در دو
زاویه و ضلع بینهما متساوی باشند oM مساوی میشود با oM' بنابراین M و
M' قرینه اند نسبت بمرکز o

۱۰۳- **تقارن نسبت بیک خط** — دو نقطه A و A' را نسبت بخط تماما
قرینه گوئیم در صورتیکه این خط عمود باشد بر وسط خط واصل ما بین آن دو نقطه و بنابراین
تعریف از برای تعیین قرینه A نسبت بخط تماما عمود AD را از A بر آن خط فرود
آورده باندازه خودتا A' امتدادش میدهیم پس نقطه A' قرینه A است
نسبت به تماما و این خط را محور تقارن گوئیم



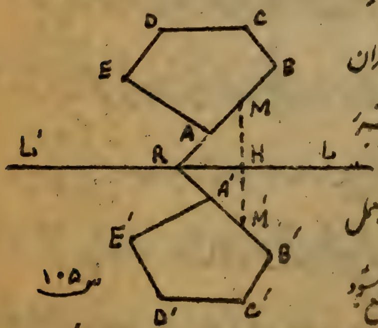
دو شكل مستوى F و F' را نسبت بمحور
نما ما قرينه گوييم هرگاه جميع نقاط F
نسبت باين محور قرينه اين جميع نقاط
متناظره شان از F' باشند وبالعكس

س ١٠٤

١٠٤ـ قضيه — دو شكل مستوى كه نسبت بيك محور قرينه باشند متساوى هستند

فرض ميكنيم دو شكل مستوى F و F' نسبت به محور نما ما قرينه باشند س ١٠٥
و M نقطه باشد از شكل F و قرينه‌اش را در F' معلوم ميكنيم يعنى از M
عمود HM را بر محور فرود آورده باندازه خودش تا M' امتدادش ميدهيم پس
نقطه M' از شكل F' قرينه M خواهد بود

و پس از اين مقدمه فرض ميكنيم P سطح شكل F باشد كه بواسطه محور نما ما بدو جزء داخلى
و [illegible] قسمت شده و آنرا در حول نما ما دوران
ميدهيم بطوريكه جزو اعلاى سطح منطبق شود بر جزء
اسفل چون MH عمود است بر نما ما بعلاوه
ونقطه H ثابت است پس MH واقع شود
بر استقامت M'H و چون HM' = HM نقطه M منطبق شود بر قرينه‌اش M'



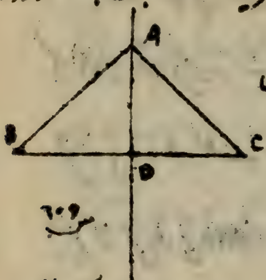
س ١٠٥

و بهمین طریق هر نقطه از شکل F واقع میگردد بر نقطهٔ نظیرش از شکل F′ بنابراین دو شکل F و F′ درست بر یکدیگر منطبق میگردند و متساوی میشوند.

۱۶۵ – قرینه هر قطعه خط AB هم نسبت بمحور نما عبارتست از قطعه خط مساویش A′B′ زیرا که در ضمن انطباق دو شکل F و F′ خط AB درست منطبق میشود بر A′B′ پس A′B′=AB و علاوه براین اگر خط AB پس از امتداد یا مستقیماً محور نما را در نقطهٔ R قطع کند چون نقطه R در ضمن دوران سطح ثابت است پس خط A′B′ نیز مرور خواهد کرد بر R و دو زاویه ARنما و A′Rنما متساوی میگردند و هرگاه خط CD موازی محور باشد قرینه اش C′D′ نیز موازی محور خواهد بود پس CD و C′D′ متساوی و متوازی و در یک جهة ممتدند و بالاخره دو زاویه متناظر ABC و A′B′C′ نیز متساویند چونکه قابل انطباق هستند ولیکن در خلاف جهة یکدیگر واقعند (نمرهٔ ۵۴)

۱۶۶ – **محور تقارن یک شکل** – هرگاه دو نقطه M و M′ از یک شکل مستوی قرینه یکدیگر باشند نسبت بخط نما واقع در سطح آن شکل دراین صورت خط نما را محور تقارن یا بطور ساده محور آن شکل گویند مثلاً در مثلث متساوی الساقین ABC نمرهٔ ۱۰۵ عمود وارد از رأس A بر قاعده BC محور آن مثلث است

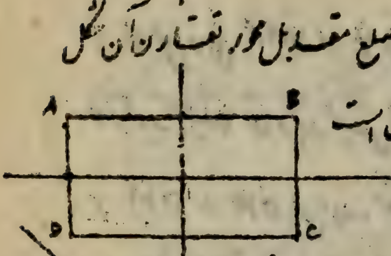
چون که خط AC و AB و همچنین DB و DC قرینه اند نسبت به AD و در هر مثلث



متساوی الاضلاع عمود وارد از هر رأس بر ضلع مقابلش محور مثلث است بنابراین مثلث متساوی الاضلاع دارای سه محور تقارن است

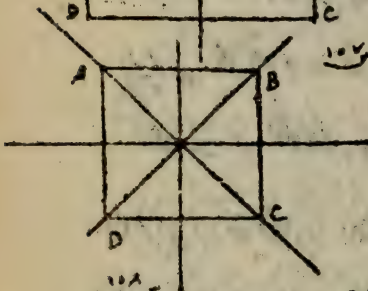
ش ۱۰۶

و در هر مربع مستطیل خط واصل مابین وسط هر دو ضلع متقابل محور تقارن آن شکل است پس مربع مستطیل دارای دو محور تقارن است



و در مربع نیز خط واصل مابین وسط هر دو ضلع متقابل محور آن شکل است و علاوه بر این دو قطر مربع نیز محور آن میباشند زیرا که مثلاً قطر BD چون عمود است بر وسط AC پس ADB و CDB قرینه اند نسبت به DB لهذا مربع دارای چهار محور تقارن است

ش ۱۰۷

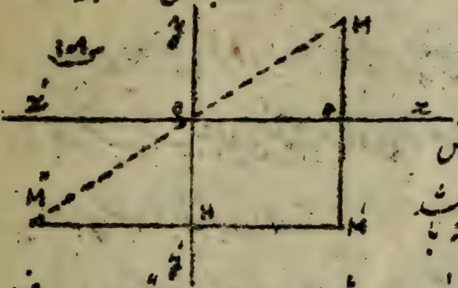


ش ۱۰۸

۱۰۲- **تبصره** - هر شکل مستوی که دارای دو محور متعامد باشد نقطه تلاقی دو محور نیز مرکز تقارن آن شکل است

فرض میکنیم شکل F دارای دو محور متعامد xx' و yy' باشد و O و M نقطه از F باشد و M' قرینه M باشد نسبت بمحور xx' و M'' قرینه M' باشد

نسبت بمحور yy' واین دو نقطه M' و M'' نیز متعلقند بشکل F و باید ثابت کنیم که M و M'' قرینه اند نسبت به O



محل تلاقی دو محور معتبر فرض میکنیم D محل تلاقی MM' و xx' باشد و H محل تلاقی $M'M''$ و yy' در دو مثلث ODM و OHM'' دو ضلع و زاویه بینهما متساویند یعنی $MDO = M''HO$ و $OD = M''H$ و $OH = DM$ پس این دو مثلث متساوی میشوند و $OM'' = OM$ و $MOD = M''OH$ وچون $M''OH = x'OM''$ زیرا که متبادله داخله اند نسبت بدو خط متوازی xx' و $M'M''$ و قاطع OM'' پس $MOD = x'OM''$ بنابراین دو خط متساویهٔ OM و OM'' بر یک استقامت واقعند و دو نقطه M و M'' قرینه اند نسبت بمرکز O و بهمین طریق ثابت میکنیم که هر نقطه از شکل F قرینه نقطه دیگر است از همان شکل نسبت بنقطهٔ O پس O مرکز شکل F است

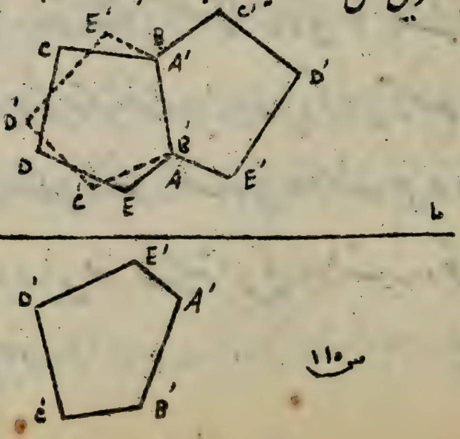
۸۰ـ تبصره مهم راجع باشکال متساویه ـ بنابرآنچه مقدم شد می‌بینیم که دو شکل قرینه نسبت بیک نقطه یا بیک خط متساوی هستند اما با یک اختلافی که لازمست

ایراد نمود از این قرار

هرگاه دو شکل نسبت بیک نقطه قرینه باشند میتوان همواره یکی را بر دیگری نقل و منطبق نمود بدون خارج کردن آن شکل از سطح و زوایای آنها در یک جهة واقع میگردند و در اینصورت گوئیم که دو شکل مفروض مستقیماً متساوی هستند

و اما اگر دو شکل نسبت بخطی قرینه باشند کلیةً نمیتوان آنها را بطریق مذکور به یکدیگر نقل و منطبق نمود

مثلاً فرض میکنیم دو کثیر الاضلاع ABCDE و A'B'C'D'E' نسبت به محور تا ما قرینه باشند ش ۱۱۰ و بخواهیم شکل اول را بدون خارج کردن از سطح بر شکل ثانی نقل کنیم باید ضلع A'B' بر مساویش AB نقل و منطبق نمود و این عمل بدو طریق ممکن است یا آنکه نقطه A' را بر A و B' را



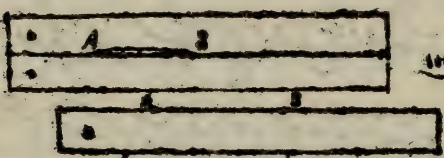
ش ۱۱۰

بر B تبدیل کنیم و یا آنکه A' را بر B و B' را بر A در حالت اوّل دو کثیر الاضلاع بطرفین ضلع AB افتند و بریکدیگر منطبق نمیشوند و در حالت ثانی بریک طرف ضلع AB افتند ولی پس از قرار گرفتن A'B' بر BA چون زاویهٔ A'B'C' عموماً مساوی زاویه BAE نیست باز دو شکل مفروض بریکدیگر منطبق نمیگردند بدلیل آنکه در دو شکل قرینه نسبت بخطی اجزای قرینه بیک وضع واقع نیستند و زوایای هم در خلاف جهه یکدیگر واقعند لهذا برای انطباق دو کثیر الاضلاع مفروض ناچار باید یکی را در حول محور تقارن ظاهراً دوران داده از سطح خارج نمود تا بر دیگری منطبق شود در اینصورت گوئیم این دو شکل معکوساً متساویند

پس از بیانات فوق چنین نتیجه میشود که دو قسم اشکال متساوی با شکل F میتوانند موجود باشند اوّلاً اشکالی که مستقیماً متساوی F باشند یعنی در یک جهه واقع باشند چنانکه بتوان آنها را بدون خارج کردن از سطح بریکدیگر منطبق نمود ثانیاً اشکالی که معکوساً متساوی F باشند یعنی در خلاف جهه یکدیگر واقع باشند در این صورت میتوان یکی را بر قرینه دیگری نسبت بخطی نقل و منطبق نمود

۱۴ــ استعمال ستاره گونیا

۱۱۹ــ برای ترسیم خط مستقیم بروی کاغذ آلت ستاره استعمال میکنیم و آن تخته ایست دراز و مسطح که دو کناره اش خوب راست باشد و اگر بخواهیم بر دو نقطه مفروضه A و B (ش ۱۴۱) خطی مستقیم بگذرانیم ستاره را بروی کاغذ چنان قرار میدهیم که یک لب آن بر آن دو نقطه بگذرد و بعد با نوک مداد یا زگرد یا با خط کش خطی بدقت در کنار ستاره رسم میکنیم

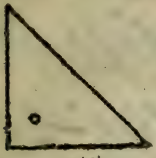


ش ۱۴۲

واما قبل از استعمال ستاره باید آن را امتحان نمود بطریقی که خطی با ستاره روی کاغذ رسم میکنیم و دو نقطه A و B در روی آن خط نشان میکنیم و بعد ستاره را بر میگردانیم بطوری که روی دیگرش بر صفحه کاغذ افتد و باز همان کناره ستاره را بر دو نقطه A و B میگذرانیم و مجدداً خطی در آن کنار رسم میکنیم اگر ستاره خوب راست باشد این دو خط درست بر یکدیگر منطبق گشته یک خط میشود و اگر ستاره راست نباشد دو خط مختلف میشوند

۱۲۰ــ گونیا ـ عبارتست از یک مثلث قائم الزاویه چوبی یا فلزی

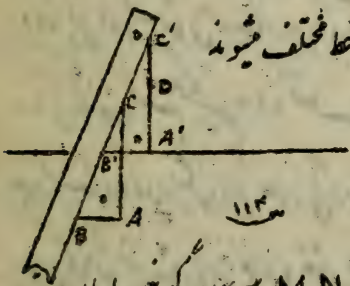
که بجهة ترسیم خطوط عمود و متوازی استعمال کنند ش ۱۱۲ و قبل از استعمال گونیا



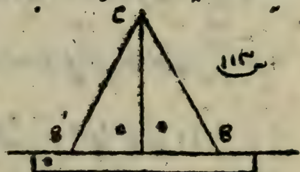
باید آن را امتحان کرد که سه کناره اش درست مستقیم باشند و آن را بدستور ستاره امتحان میکنیم و یا بدقت تحقیق کنیم که

ش ۱۱۲

زاویه A نیز قائمه باشد بدینطریق که یک ضلع AB گونیا را در کنار یک ستاره چوب تکیه میدهیم و با نوک مداد خطی در کنار دیگر AC رسم میکنیم ش ۱۱۳ و بعد گونیا را برمیگردانیم و بوضع AC'B' قرار میدهیم و باز مجدداً خطی در کنار AC رسم میکنیم پس اگر زاویه A قائمه باشد این دو خط بر یکدیگر منطبق گشته یک خط میشود و اگر قائمه نباشد آن دو خط مختلف میشوند



ش ۱۱۴

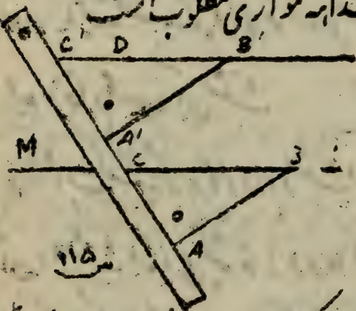


ش ۱۱۳

۱۲۱- برای ترسیم عمود از نقطه D بر خط MN ش ۱۱۴ گونیا را بر ورق کاغذ چنان قرار میدهیم که یکی از دو ضلع زاویه قائمه مثلاً AB منطبق شود بر MN و بعد گونیا را محکم گرفته ستاره را در کنار وتر ستاره می لغزانیم تا آنکه ضلع دیگر زاویه قائمه AC بوضع A'C' منتقل شده بر نقطه D بگذرد و آن وقت خطی در کنار A'C' رسم میکنیم که عمود مطلوب است زیرا که چون دو زاویه

متقابله ACB و A'C'B' متساوی هستند ضلع AC گونیا بموازی خود
به A'C' نقل شده و چون A'C' عمود است بر AB پس خط AA' همان
عمود مطلوب است

۱۲۲- هرگاه بخواهیم از نقطه D خطی بموازات خط دیگر MN رسم کنیم (ش ۱۱۵)
یکی از اضلاع گونیا (در یک ضلع زاویهٔ قائمه) مثلاً BC را به
MN تکیه میدهیم و بعد ستاره را بر ضلع دیگر گونیا مثلاً بر AC تکیه میدهیم
آنوقت ستاره را روی کاغذ محکم و بحرکت گرفته گونیا را در کنار ستاره
می لغزانیم تا انکه ضلع BC بوضع B'C' به نقطه D مرور کند و خطی
در کنار B'C' رسم میکنیم این خط بالبداهه موازی مطلوب است



ش ۱۱۵

۱۲۳- باید دانست که در رسم عمود بر خط
مفروض بعد گونیا دارای چندان
دقت زیادی نیست بلکه استعمال ستاره و
پرگار مرجح است چنانکه در آخر مقاله دوم مذکور خواهیم داشت ولی موقعی هست
که استعمال گونیا را ترجیح میدهند یعنی وقتی که بخواهیم چند خط بموازات متعدد
مفروض رسم کنیم و یا انکه چندین عمود بر خطی رسم کنیم ابتدا ابده

ستاره و پرکار یک عمود بر آن خط رسم میکنیم و بعد سایر عمود ها را مبدء گونیا بموازات آن عمود رسم میکنیم

امثله متعلق بمقالهٔ اول

قضایای مبتدیین نمودنی

۱- مجموع فواصل هر نقطه مفروضه در درون مثلث از سه رأس آن محصور است ما بین نصف محیط و تمام محیط آن مثلث

۲- ثابت کنید که هرگاه AD میانه مثلث ABC باشد این نامساوی حاصل میشود $\frac{1}{2}(AB+AC-BC) < \frac{1}{2}(AB+AC)$

۳- ثابت کنید که مجموع طولهای سه میانه هر مثلث محصور است ما بین نصف محیط و تمام محیط آن مثلث

۴- ثابت کنید که هرگاه در دو مثلث دو ضلع و یک میانه نظیر بنظیر متساوی باشند آن دو مثلث متساوی میشوند (دو حالت)

۵- ثابت کنید که هرگاه در مثلث قائم الزاویه یکی از دو زاویه حاده مضاعف دیگری باشد وتر نیز مضاعف ضلع کوچکتر است و بالعکس

۶- هرگاه در مثلثی دو ارتفاع متساوی باشند اضلاع نظایر شان نیز متساوی‌اند

و اگر هر سه ارتفاع متساوی باشند هر سه ضلع متساوی باشند

۷- از تقاطع منصف الزوایای هر ذواربعة الاضلاع یک ذواربعة الاضلاع جدیدی تشکیل میگردد که هر دو زاویه مقابل آن مکمل یکدیگر باشند معلوم کنید که اگر ذواربعة الاضلاع مفروض متوازی الاضلاع مستطیل باشند شکل حادث چه خواهد بود.

۸- مجموع فواصل هر نقطه مفروضه در قاعده مثلث متساوی الساقین از دو ضلع دیگر مقداریست ثابت و اگر نقطه را در امتداد قاعده فرض کنیم حکم این قضیه چگونه تغییر میکند

۹- مجموع فواصل هر نقطه مفروضه در درون مثلث متساوی الاضلاع از سه ضلع مقداریست ثابت و اگر نقطه را در خارج مثلث فرض کنیم حکم قضیه چگونه تغییر میکند

۱۰- اوساط اضلاع هر ذواربعة الاضلاع رؤس متوازی الاضلاع هستند معلوم کنید که در ذواربعة الاضلاع مفروض چه شرطی لازم است که متوازی الاضلاع حادث مستطیل یا لوزی یا مربع باشد

۱۱- در هر ذواربعة الاضلاع خطوط واصله مابین هر دو ضلع مقابل و خط واصل مابین منتصف دو قطر در یک نقطه متقاطع و نصف میشوند

مقاله اوّل

مسائل حلّ کردنی

۱۲- نقطه معلوم کنید که بیک فاصله باشد از دو نقطه مفروضه و متساوی البعد از خط مفروض

۱۳- نقطهٔ پیدا کنید متساوی البعد از دو نقطه مفروضه و بفاصله معیّنی از خطّ مفروض باشد

۱۴- چه شرطی در اضلاع غیر متوازیه ذو ذنقه لازم است تا هر دو زاویه مقابل ذو ذنقه مکمل یکدیگر باشند

۱۵- شکل حادث از تقاطع خطوط منصف الزوایای متوازی الاضلاع را معلوم کنید و در چه حالت این شکل مربع میشود

۱۶- ثابت کنید که در هر مربع مستطیل میتوان یک عده لایتناهی متوازی الاضلاع محاط نمود که اضلاعشان موازی اقطار مستطیل باشند و جمیعاً دارای یک محیط باشند

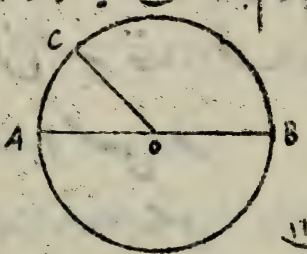
۱۷- معلوم کنید مکان هندسی نقاطی که مجموع یا تفاضل فواصلشان از دو خط ثابت مقدار ثابت باشد و مساوی با طول معیّنی

مقالهٔ دوّم

دایره

۱– تعاریف

۱۷۴– مُحیط دایره – مُحیط دایره خطی است منحنی محدود که جمیع نقاطش بیک فاصله باشند از یک نقطه درونی موسوم بمرکز ش ۱۱۶ و یا میتوان گفت محیط دایره مکان هندسی نقاطی است از سطح که بیک فاصله باشند از یک نقطه ثابته موسوم بمرکز



ش ۱۱۶

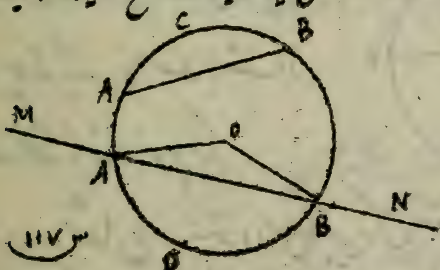
۱۷۵– شعاع – هر خط واصل ما بین مرکز و نقطه از محیط را شعاع یا نصف قطر گوئیم مثل شعاع OC ش ۱۱۶ و بنا بر تعریف دایره جمیع اشعه متساوی باشند

۱۷۶– قطر – هر خط که بمرکز گذشته و از طرفین بمحیط منتهی شود قطر گوئیم مثل قطر AB ش ۱۱۶ جمیع اقطار متساوی باشند و هر قطر مضاعف شعاع است

۱۷۷– سطح دایره – سطح دایره قطعه سطح مستوی است محصور بمحیط دایره – کلمهٔ دایره هم بر محیط اطلاق میشود هم بر سطح ولی از سیاق کلام مقصود معلوم میشود و در معنی اختلاف کلی است

۱۷۸ـ از تعریف دایره چنین نتیجه میشود که دو دایره که بیک شعاع باشند متساویند
زیرا که چون اندو دایره را چنان بر روی یکدیگر قرار دهیم که دو مرکز آنها
بر یکدیگر واقع شوند از تساوی اشعه انطباق خود آنها و محیط لازم میآید

۱۷۹ـ هر نقطه که در درون دایره فرض کنیم فاصله اش از مرکز کمتر از شعاعست
و هر نقطه که در خارج فرض کنیم فاصله اش از مرکز بیش از شعاع است ـ
مجموع جمیع نقاط واقعه در داخل محیط دایره را سطح دایره گویند



ش ۱۱۷

۱۸۰ـ قوس ـ قطعهٔ ایست از محیط دایره مثل قوس ACB ش ۱۱۷

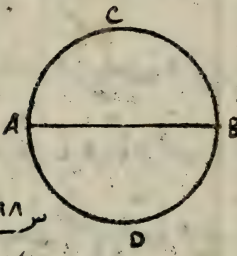
۱۸۱ـ وتر ـ وتر خطی است واصل ما بین طرفین قوس مثل وتر AB
هر وتر در دایره مقابل است بدو قوس ولی کلیهٔ قوس کوچکتر را منظور میآوریم
مثلاً وتر AB مقابل است بدو قوس ACB و ADB ش ۱۱۷

۱۸۲ـ خط قاطع ـ خط قاطع در دایره آنست که محیط را بر دو نقطه قطع
کند مثل قاطع MN ش ۱۱۷ هیچ خطی محیط دایره را بیش از دو نقطه قطع
نکند زیرا که اگر مثلاً آنرا بر سه نقطه قطع کند لازم میآید که خطوط واصله

از مرکز باین سه نقطه متساوی گردند و این محال است چونکه از یک نقطه بیش از دو خط متساوی نمیتوان بخطی وصل نمود (نمره ۸۸)

قضیهٔ ۱

۱۸۳ - هر قطر محیط و سطح دایره را بدو جزء متساویه قسمت کنند



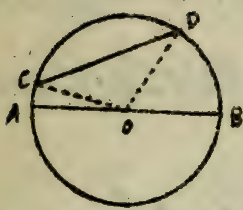
س ۱۲۸

برهان - چون قوس ACB را (س ۱۲۸) در حول قطر AB مانند لولا برگردانیم و بر قوس ADB قرار دهیم این دو منحنی درست بر یکدیگر منطبق میشوند والا لازم میآید که بعضی نقاط محیط مختلف البُعد باشند از مرکز و این خلاف فرض دایره است پس دو قوس ACB و ADB درست بر یکدیگر منطبق میشوند و متساوی میگردند و همچنین دو قطعه سطح دایره محصوره مابین این دو قوس و قطر نیز متساوی میشوند

قضیهٔ ۲

۱۸۴ - در دایره هر وتر اقصر است از قطر

برهان - چون دو شعاع OC و OD را بر طرفین وتر CD وصل کنیم (س ۱۲۹) از مثلث COD چنین حاصل میشود



ش ۱۱۹

چون $OC + OD > OD$

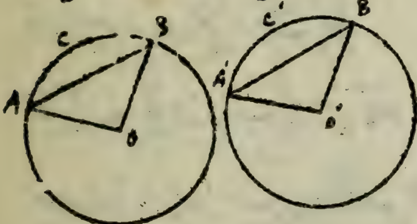
$OC + OD = AB$

پس $AB > CD$

۲ـ قسی و اوتار

قضیهٔ ۳

۱۸۵ـ در یک دایره یا دو دایرهٔ متساویه قسی متساویه موتر ند باوتار متساویه و بالعکس اوتار متساویه وتر باشند بقسی متساویه



ش ۱۲۵

اولاً فرض میکنیم قوس ACB مساوی باشد بقوس $A'C'B'$

باید ثابت نمود که وتر AB مساویست بوتر $A'B'$

برهان ـ دایرهٔ O' را نقل میکنیم بر دایرهٔ O بطریقی که دو مرکز آنها بر یکدیگر قرار گیرند و نقطه A' واقع شود بر نقطه A و آنوقت این دو دایره درست بر یکدیگر منطبق میشوند و چون قوس ACB بفرض مساویست با قوس $A'C'B'$ نقطه B' واقع میشود بر نقطهٔ B پس دو وتر AB و $A'B'$ چون طرفینشان بر یکدیگر واقع شدند درست منطبق میشوند

و مساوی میگردد

ثانیاً بالعکس فرض میکنیم وتر AB مساوی باشد با وتر $\overline{A'B'}$ مساوی ۱۳۰

باید ثابت کرد که قوس ACB مساوی است به قوس $A'C'B'$

برهان — اشعهٔ OA و OB و $A'O'$ و $O'B'$ را وصل میکنیم در دو مثلث

AOB و $A'O'B'$ چون سه ضلع نظیر بنظیر مساوی هستند پس این دو مثلث مساوی

میشوند و زاویه AOB مساوی میشود با زاویه $A'O'B'$ و حال اگر دایرهٔ

O' را بر دایرهٔ O نقل کنیم بطریقی که شعاع $A'O'$ منطبق شود بر

مساویش AO شعاع $O'B'$ نیز واقع خواهد شد بر استقامت

OB چونکه $\widehat{A'O'B'} = \widehat{AOB}$ و نقطهٔ B' واقع میشود B پس

قوس $A'C'B'$ مساوی میشود با قوس ACB فهو المطلوب

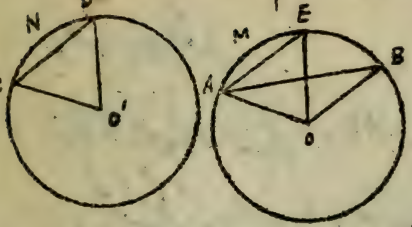
قضیهٔ ۴

۱۰۶ — در یک دایره یا در دو دایرهٔ متساویه هر قوس

اعظم موتر باشد به وتر اطول و بالعکس هر وتر اطول

مقابل است بقوس اعظم در صورتیکه قوسهای

مفروضه کوچکتر باشند از نصف محیط



اولاً فرض میکنیم قوس AMB بزرگتر باشد از قوس CND (۱۲) باید ثابت نمود که وتر AB اطول است از وتر CD

برهان ـ از قوس AMB قوس AME را مساوی قوس CND جدا میکنیم و وتر AE را وصل میکنیم آنوقت دو ضلع OA و OB از مثلث ABO مساوی میشود با دو ضلع OA و OE از مثلث AEO و چون زاویهٔ AOB اعظم است از زاویهٔ AOE پس ضلع سوم AB اطول باشد از ضلع سوم AE (نمره ۷۹) یعنی وتر AB اطول از وتر CD است

ثانیاً بالعکس فرض میکنیم وتر AB اطول باشد از وتر CD باید ثابت کرد که قوس AMB اعظم است از قوس CND

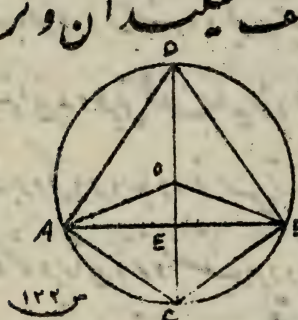
برهان ـ اگر بگوئیم دو قوس AMB و CND متساوی هستند لازم میآید که دو وتر AB و CD نیز متساوی باشند و این خلاف فرض است و اگر بگوئیم قوس AMB کوچکتر است از قوس CND لازم میآید که وتر AB کوچکتر باشد از وتر CD و این نیز خلاف فرض است پس لابد قوس AMB بزرگتر است از قوس CND

۱۸۷ ـ تنبیه ـ در قضیهٔ فوق قوس مفروضه را کوچکتر از نصف محیط

گرفتیم داگر اعظم فرض کنیم حکم برخلاف مذکور یعنی قوس کوچکتر موتر
است به وتر اطول

قضیهٔ ۵

۱۸۸ـ هر قطر عمود بر وتر نصف میکند آن وتر و دو قوس موتر آن را



س ۱۲۲

برهان ـ اوّلاً قطر CD را بر وتر AB عمود میکنیم س ۱۲۲ و دو شعاع OA و OB را وصل میکنیم چون این دو شعاع دو مایلند متساوی پس متساوی البعد میشوند از موقع عمود OE یعنی $AE = EB$

ثانیاً دو وتر AC و BC را وصل میکنیم چون $AE = BE$ پس دو مایل AC و BC متساوی البعدند از موقع عمود EC پس $AC = BC$ و چون این دو وتر متساوی شدند قوسهای موترشان $\overset{\frown}{AC}$ و $\overset{\frown}{BC}$ نیز متساوی میشوند بهمین دلیل ثابت میکنیم که قوس AD مساوی است با قوس BD

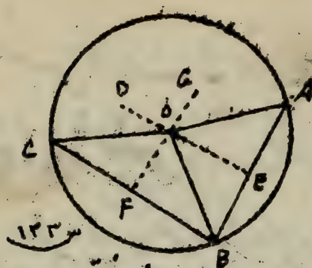
۱۸۹ـ نتیجه ـ مرکز دایره و وسط وتر و اواسط هر دو قوس موتر هر چهار نقطه بر استقامت یک خط واقع میشوند

۱۹۰ - تبصره - خط CD دارای پنج شرط ذیل است اولاً عمود است بر وتر ثانیاً مرور کند بر مرکز ثالثاً منصف وتر است رابعاً و خامساً منصف هر دو قوس موتر است پس هر خطی که دو شرط از این شروط خمسه را دارا باشد باشد بالضروره سه شرط دیگر را نیز دارا است پس از این قرار قضیه فوق را میتوان به ده طریق مختلف بیان نمود مثلاً عمودی که اخراج شود بر وسط وتر مرور میکند بر مرکز و بر وسط دو قوس موتر و همچنین خط واصل ما بین مرکز و وسط وتر عمود شود بر آن وتر و منصف هر دو قوس موتر است

قضیه ۶

۱۹۱ - بر سه نقطه غیر واقعه بر یک استقامت همواره میتوان یک دایره مرور داد و بیش از یک دایره ممکن نیست

برهان - فرض میکنیم سه نقطه A و B و C غیر واقعه بر یک استقامت باشند ش ۱۲۳ دو خط AB و CB را وصل میکنیم و بر وسط آنها دو عمود ED و FG را اخراج میکنیم این دو عمود در یک نقطه متلاقی میشوند زیرا که دو خط AB و BC بر یک استقامت نیستند پس فرض میکنیم نقطه O محل تلاقی آن دو عمود باشد



و چون نقطه O متعلق است بعمود DE متساوی البعد باشد از دو نقطه A و B و چون همان نقطه متعلق است بعمود FG متساوی البعد باشد از دو نقطه B و C پس نقطه O چون بیک فاصله شد از سه نقطه A و B و C بنابراین دایرهٔ که بمرکز O و بشعاع OA رسم شود مرور خواهد نمود بر سه نقطه A و B و C

حال گوئیم ممکن نیست دایرهٔ دیگر بر همان سه نقطه عبور داد زیرا که اگر چنین دایرهٔ موجود بود مرکزش میبایست متساوی البعد باشد از سه نقطه A و B و C و واقع باشد بر محل تلاقی دو خط ED و FG و این دو خط بر یک نقطه O بیشتر متقاطع نباشند پس هر دایرهٔ دیگر که بر سه نقطه A و B و C مرور نماید مختلط میگردد با دایره که بمرکز O و بشعاع OA رسم شود بنابر این بر سه نقطهٔ مفروضه بیش از یک دایره نمیتوان مرور داد

۱۹۲ - **نتیجه ۱** - بر دو نقطهٔ مفروضه میتوان دوایر بسیار مرور داد و مکان هندسی مراکز آنها خطی است عمود بر وسط خط واصل مابین آن دو نقطه

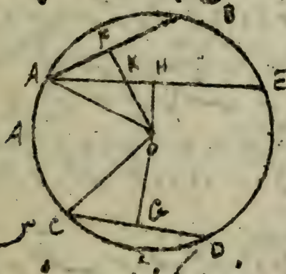
۱۹۳ - **نتیجه ۲** - دو دایره اگر زیاده از دو نقطه مشارک باشند

منطبق خواهند شد

۱۹۴- نتیجه ۳- بر سه راس هر سه مثلث میتوان یک دایره مرور داده بیش و در آن صورت دایره را محیط بر مثلث و مثلث را محاط در دایره گوئیم

قضیهٔ ۷

۱۹۵- در یک دایره یا دو دایرهٔ متساویه دو وَتَر متساوی الطول متساوی البعدند از مرکز و از دو وتر مختلف آنکه اطول باشد بعدش از مرکز کمتر است



ش ۱۱۸

اولاً فرض میکنیم وَتَرِ AB = وَتَرِ CD ش ۱۲۴ و دو عمود OF و OG را رسم میکنیم تا آن دو وتر را نصف کنند و دو شعاع AO و OC را وصل میکنیم در دو مثلث قائم الزاویه AFO و CGO وتر و یک ضلع متساویند یعنی وتر AO = CO و ضلع AF = CG چون هر دو نصف دو وتر متساویه AB و CD باشند پس این دو مثلث متساوی متحد

$OG = OF$

ثانیاً فرض میکنیم وتر AE اطول باشد از وتر CD ش ۱۲۴ دو عمود OH و OG را

بر آنها فرود میآوریم و باید ثابت کرد که $OG > OH$

برهان - چون وتر AE اطول است از وتر CD قوس AE اعظم است از

قوس CD پس از قوس AE قوس AB را مساوی قوس CD جدا میکنیم و وتر

AB را وصل میکنیم و OF را بر آن عمود میکنیم حال ظاهر است که عمود OH اقصر است

از مایل OK پس بطریق اولی اقصر میشود از OF ولی $OF = OG$ چونکه دو وتر

AB و CD متساویند پس OH اقصر میشود از OG

۱۹۶- عکس قضیه — در یک دایره یا در دو دایره متساوی دو وتر متساوی البعد

از مرکز متساوی باشند و از دو وتر مختلف البعد آنکه بمرکز نزدیکتر باشد اطول است

۱۹۷- در هر دایره طول وتر و بعدش از مرکز دو مقدارهستند که بعکس یکدیگر تغییر

کنند یعنی وقتیکه یکی ترقی کند دیگری تنزل مینماید

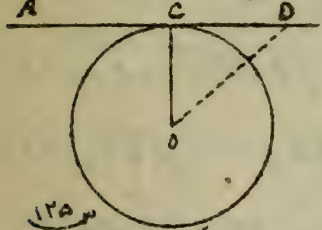
۳- خط مماس

۱۹۸- تعریف — خط مماس بر دایره آنست که با دایره در یک نقطه مشترک باشد

بیش مثل مماس AB ش ۱۲۵ و نقطه مشترکه C را نقطهٔ تماس گویند

قضیهٔ ۸

۱۹۹- عمود مرسوم بر طرف شعاع مماس شود بر دایره و بالعکس خط مماس بر دایره عمود شود بر طرف شعاع واصل بنقطهٔ تماس

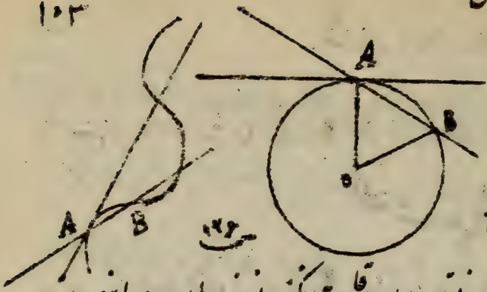


برهان- اوّلاً فرض میکنیم AB عمود باشد بر طرف شعاع OC ص ۱۲۵ هر خط مایل مثل OD واصل از مرکز O بر خط AB اطول میشود از شعاع OC پس نقطهٔ D در خارج دایره افتد و از این قرار خط AB بیش از یکنقطه C با دایرهٔ اشتراک ندارد و بنابراین مماس است بر دایره   فهو المطلوب

ثانیاً بالعکس فرض میکنیم خط AB در نقطه C بر دایرهٔ O مماس باشد گوئیم شعاع OC واصل بر نقطهٔ تماس C عمود است بر خط مماس زیرا که بنا بفرض جمیع نقاط AB غیر از نقطه C در خارج دایره باشند پس هر خطی مانند OD واصل از مرکز بر نقطه از AB انتها بیش در خارج دایره افتد و اطول باشد از OC بنابراین شعاع OC اقصر خطی است که بتوان از مرکز O بر خط AB وصل نمود پس عمود است بر خط AB

۲۰۰- نتیجه - بر نقطه مفروضه بر محیط دایره نمیتوان بیش از یک خط مماس نمود

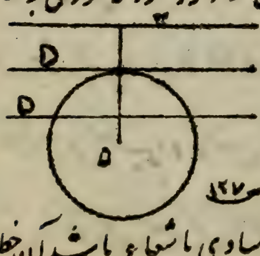
۲۰۱- تعریف جدید مماس خط مماس بر هر منحنی کاتیه حدّ اوضاع قاطع AB است بنابر آنکه در حول نقطهٔ A انقدر دوران کند که نقطهٔ مقطع دیگر B بیاید بر نقطهٔ A



ش ۱۲۶

منطبق شود و این تعریف کلی است
بجمیع انواع خطوط منحنیه تعلق گیرد و اگر
منحنی مسدود باشد و قاطع بیش از دو نقطه با او ملاقات نکند مانند دایره در اینصورت ظاهر است که چون آن دو نقطه در یک نقطه جمع شوند آن خط قاطع با منحنی بیش از یک نقطه مشترک نباشد و آنوقت میتوان گفت که مماس خطی است که بیش از یک نقطه با منحنی اشتراک نداشته باشد ولکن وجود این حد بدیهی و مسلم نگردد مگر آنکه آنرا در هر منحنی علیحده مدلل نمائیم مثلاً در دایره چنین گوئیم چون مثلث AOB متساوی الساقین است ش ۱۲۶ این تساوی حاصل میشود ۲ قائمه $= \widehat{AOB} + 2\widehat{OAB}$ و بعد $\widehat{OAB} = 1 - \frac{AOB}{2}$ پس وقتیکه قاطع AB در حول A دوران کند نقطهٔ B بیاید و منطبق شود بر A و آنوقت زاویه $\widehat{AOB}$ حدش صفر است و زاویهٔ $\widehat{OAB}$ حدش زاویهٔ قائمه است بنابراین حد اوضاع AB عبارتست از عمود AT بر شعاع OA.

۲۰۲ - اوضاع نسبی خط و دایره - چون از مرکز دایره O عمودی بر خط



ش ۱۲۷

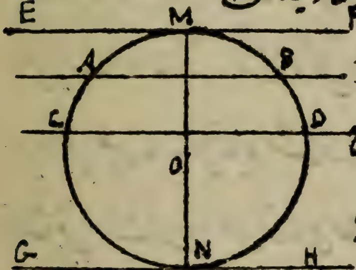
مفروض D فرود آریم ش ۱۲۷ سه حالت میتواند اتفاق افتد
اولاً هرگاه فاصله مرکز O از خط D بزرگتر از طول شعاع
باشد آنخط خارج دایره است ثانیاً اگر فاصله مرکز از خط D مساوی با شعاع باشد آن خط

مماس دایره است ثالثاً هرگاه فاصلهٔ مرکز از خط D کوچکتر از شعاع باشد آنخط قاطع دایره است

قضیهٔ ۹

۲۰۳- دو خط متوازی از محیط دایره دو قوس متساوی جدا کنند

اولاً فرض میکنیم دو متوازی AB و CD دایره را قطع کنند یعنی هر دو وتر باشند باید ثابت کنیم که دو قوس AC و BD متساویند س ۲۸



برهان- شعاع OM را بر آن دو متوازی عمود میکنیم این شعاع هر یک از دو قوس $\overset{\frown}{CMD}$ و $\overset{\frown}{AMB}$ را بر دو جزء متساویه قسمت کند پس این دو تساوی حاصل میشود

$$AM = MB$$
$$CM = MD$$

و چون آنها را عضو بعضو از یکدیگر نقصان نمائیم چنین میشود $CM - AM = MD - MB$ یا $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$ فهو المطلوب

ثانیاً فرض میکنیم قاطع AB و مماس EF متوازی باشند س ۲۸ شعاع OM را بر نقطهٔ مماس M وصل میکنیم و آن عمود شود بر مماس EF و بر موازیش AB نیز عمود میشود پس قوس AMB را بر دو جزء متساویه قسمت کند یعنی $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB}$

ثالثاً فرض میکنیم دو مماس EF و GH متوازی باشند و خط AB را بموازات آن دو خط رسم میکنیم پس بنا بحالت دوم چنین حاصل میشود $AM = MB$ و $AN = NB$ و چون اینها را ... تساویرا

عضو بعضو بایکدیگر جمع کنیم چنین میشود $\overset{\frown}{AM}+\overset{\frown}{AN}=\overset{\frown}{MB}+\overset{\frown}{NB}$ یا $\overset{\frown}{MAN}=\overset{\frown}{MBN}$

۲۰۴ـ تبصره ـ حالت سوم قضیهٔ فوق را بوجه ذیل نیز میتوان مبرهن نمود چون دو شعاع OM و ON واصل بر دو نقطه تماس مرتباً عمودند بر دو خط متوازیهٔ EF و GH پس بر یک استقامت باشند و خط MON قطر دایره است که محیط را بر دو حصه متساویه قسمت مینماید

۲۰۵ـ نتیجه ـ وقتیکه دو خط مماس بر دایره متوازی باشند نقاط تماس آنها طرفین قطر دایره است

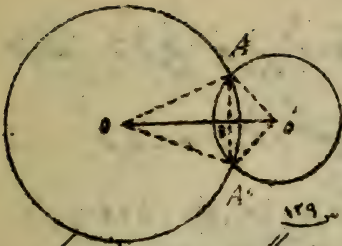
۴ـ اوضاع نسبی دو دایره بیکدیگر

۲۰۶ـ تعریف ـ دو دایره را متقاطع گویند وقتیکه در دو نقطه مشارک باشند مانند دو دایرهٔ O و O′ و دو دایره را مماس بیکدیگر گویند وقتیکه بیش از یک نقطهٔ اشتراک نداشته باشند و خط OO′ واصل مابین دو مرکز را خط المرکزین یا بعد المرکزین گویند

قضیهٔ ۱

۲۰۷ـ هرگاه دو دایره مشارک باشند در نقطهٔ واقعه در خارج خط المرکزین پس مشارک میشوند در نقطهٔ دیگر که قرینه نقطهٔ اول باشد و آن دو دایره متقاطع باشند

برهان ـ فرض میکنیم دو دایره O و O′ مشارک باشند در نقطهٔ A (ش ۱۲۹) و از نقطه خط AB را بر OO′ عمود میکنیم و آنرا باندازهٔ خود تا نقطهٔ A′ امتداد میدهیم پس نقطهٔ A′ قرینه A است نسبت بخط OO′ و چون نقطهٔ O واقع است بر خط OO′ عمود



بر وسیط AA′ یک فاصله باشد از دو نقطهٔ A و A′ یعنی O′A = O′A′ پس دایرهٔ مرسومه از مرکز O

شکل ۱۲۹

و بشعاع OA که بر نقطه A مرور کند از نقطهٔ A′ نیز خواهد گذشت و همچنین ثابت میکنیم که دایرهٔ مرسومه از مرکز O′ و بشعاع O′A بر نقطه A′ نیز مرور میکند پس دو دایرهٔ مفروضه O و O′ در نقطه A′ نیز مشارک گشته متقاطع میشوند

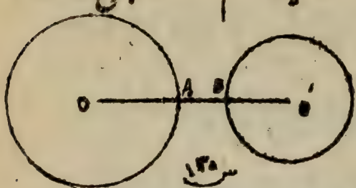
۲۰۸ - **نتیجه ا** - در دو دایره متقاطعه خط المرکزین عمود است بر وسیط وتر مشترک

۲۰۹ - **نتیجه ۲** - هرگاه دو دایره مماس یکدیگر باشند یعنی بیش از یکنقطه مشارک نباشند خط المرکزین مرور کند بر نقطهٔ تماس زیرا که اگر نقطه تماس واقع بود در خارج خط المرکزین آنوقت آن دو دایره در یکنقطهٔ دیگر نیز مشارک میشدند و متقاطع میگشتند نه مماس

۲۱۰ - **اوضاع نسبی دو دایره بیکدیگر** - چون دو دایرهٔ را نسبت بیکدیگر بسنجیم دارای پنج وضع مختلف توانند بود که بیش ازین قرار هرگاه دو دایره در هیچ نقطه مشارک نباشند در اینصورت یا متخارجند ش ۱۳۰ یا متداخل ش ۱۳ و اگر مماس یکدیگر باشند یا مماس خارجند ش ۱۳۱ یا مماس داخل ش ۱۳۲ و بالاخره اگر در دو نقطه مشارک باشند متقاطعند

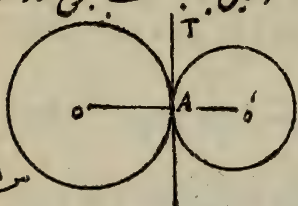
قضیهٔ ۱۱

۱۲۱- اولاً هرگاه دو دایره متخارج باشند خط المرکزین اعظم است از مجموع دو شعاع



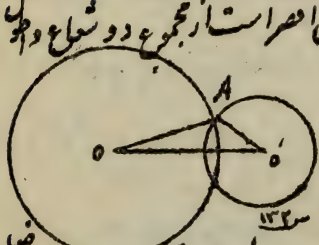
زیراکه خط المرکزین OO' (ش ۱۳۰) مرکب است از مجموع دو شعاع OA و $O'B$ باضافه AB یعنی $OO' = OA + O'B + AB$ پس $OO' > OA + O'B$ و چون OO' را به D و OA و $O'B$ را به R و r بنامیم نامساوی فوق چنین نوشته میشود $D > R + r$

ثانیاً اگر دو دایره مماس خارج باشند بعد المرکزین برابر است با مجموع دو شعاع



زیراکه چون نقطه تماس A واقع است بر خط المرکزین و بعلاوه مرکز O' در خارج دایره O در امتداد OA افتاده پس $OO' = OA + AO'$ یا $D = R + r$ و در این حالت خط AT عمود از نقطه تماس بر OO' مماس مشترک آن دو دایره است

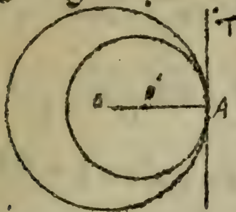
ثالثاً اگر دو دایره متقاطع باشند خط المرکزین اقصر است از مجموع دو شعاع و اطول از تفاضل آنها - زیراکه نقطه A که یکی از نقاط



فصل مشترک دو دایره O و O' است چون در خارج خط المرکزین واقع است پس در مثلث OAO' ضلع OO' اقصر است از مجموع دو ضلع دیگر و اطول از تفاضل آنها یعنی $OO' < OA + O'A$ یا $D < R + r$ و

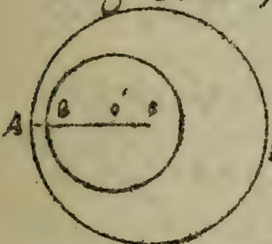
$OO' > OA - O'A$ یا $D > R - r$

رابعاً اگر دو دایره مماس داخل باشند خط المرکزین برابر است با تفاضل دو شعاع



زیرا که نقطهٔ تماس A چون واقع است بر خط المرکزین و بعلاوه مرکز O' مابین O و A افتاده پس OO' مساویست با تفاضل دو شعاع یعنی $OA - O'A = OO'$ یا $D = R - r$ و در این حالت خط AT عمود از A بر خط المرکزین مماس مشترک آن دو دایره است ص ۱۳۳

خامساً اگر دو دایره متداخل باشند خط المرکزین اقصر است از تفاضل دو شعاع



زیرا که خط المرکزین OO' جزئی است از $OO' + BA$ که تفاضل دو شعاع است یعنی $OA - O'B = OO' + BA$ پس $OO' < OA - O'B$ یا $D < R - r$

۲۱۲- قضیّه- عکس احکام پنجگانه مذکوره نتیجه صحیح است یعنی اولاً اگر $D > R + r$ دو دایره متخارج میشوند ثانیاً اگر $D = R + r$ دو دایره مماس خارج میشوند ثالثاً اگر $R - r < D < R + r$ دو دایره متقاطع میشوند رابعاً اگر $D = R - r$ دو دایره مماس داخل میشوند خامساً اگر $D < R - r$ دو دایره متداخل میشوند و هر یک از این پنج حکم بسهولت مبرهن میشود مثلاً برای اثبات حکم سوم گوئیم هرگاه خط المرکزین اقصر باشد از مجموع دو شعاع و اطول از تفاضل آنها دو دایره متقاطع میشوند

زیراکه اگر متخارج باشند اخسل بودند خط المرکزین اعظم میشد از مجموع آنها یا اصغر از تفاضلشان و این خلاف فرض است و اگر مماس یکدیگر بودند خط المرکزین مساوی میشد با مجموع دو شعاع یا بتفاضل آنها و این نیز خلاف فرض است پس دو دایره متقاطع میشوند و چهار حکم دیگر نیز بهمین وجه مبرهن میشوند

۲۱۳- نتیجه ۱ - شرط لازم و کافی برای اینکه دو دایره متقاطع باشند آنست که بعد المرکزین اقصر باشد از مجموع دو شعاع و اطول از تفاضل آنها زیراکه اگر آن دو دایره دارای وضع دیگر باشند این دو شرط در آنها صدق نکند و شرط ثانی باید همواره منضم بشرط اول باشد زیراکه اگر اکتفا کنیم فقط باعتبار شرط اول آنوقت ممکن است دو دایره مماس داخل باشند یا متداخل

۲۱۴- نتیجه ۲ - شرط لازم و کافی برای اینکه دو دایره مماس باشند عبارتست که بعد المرکزین برابر باشد با مجموع یا تفاضل دو شعاع

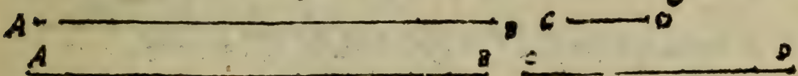
۵ - تقدیر زوایا

(مقدمه مختصری از تقدیر و نسبت کمیات محض تذکار بیان کنیم)

۲۱۵- کمیت - یا مقدار عبارتست از هر چیزی که قابل افزایش و نقصان باشد و در ریاضیات عموماً از مقادیری بحث میشود که بتوان آنها را بدقت تعریف و

و تغییر نمود (اوّلاً تساوی دو مقدار ثانیاً جمع مقادیر) و مقادیر عمده در هندسه منطبحه عبارتند از خط و زاویه و قوس

۲۱۶ـ اندازه گرفتن و مقایسه نمودن مقداری آنست که آنرا بمقدار دیگری از همان جنس که واحد فرض شده باشد بسنجیم و معلوم کنیم چند مرتبه شامل واحد یا حصهٔ صحیحی از واحد است مثلاً برای اندازه گرفتن قطعهٔ خط AB (ش ۱۳۵) قطعه خط دیگر



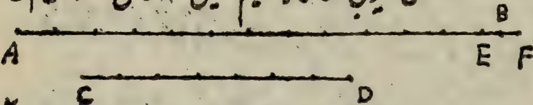
ش ۱۳۵

CD را واحد فرض کنیم و آن را بعده مرات ممکنه بر AB نقل نمائیم هرگاه AB بعده مرات صحیح مثلاً ۶ مرتبه درست شامل CD باشد گوئیم اندازه طول AB عدد ۶ است و امّا اگر بعدهٔ مرات صحیح در AB نگنجد در اینحالت واحد CD را بر چند جزء متساویه مثلاً بر ۷ جزء قسمت بکنیم و معلوم نمائیم که AB چند مرتبه از این حصص را شامل است مثلاً اگر درست شامل ۱۲ جزء باشد گوئیم اندازهٔ طول AB کسر $\frac{12}{7}$ است

و بطور کلّی چون واحد CD را بر n حصص متساویه قسمت کنیم و AB شامل m مرتبه یکی از آن اجزا باشد گوئیم اندازهٔ طول AB کسر $\frac{m}{n}$ است در صورتیکه CD واحد باشد پس وقتی که یک جزء صحیح از CD بعدهٔ مرات صحیح در AB بگنجد این جزء صحیح را مقیاس مشترک مابین AB و CD گوئیم و در اینصورت دو طول AB و

CD نسبت بهم منطق باشند و اندازه AB نسبت به CD ممکن است عدد صحیح یا کسری باشد

۲۱۷ــ گاه اتفاق افتد که هیچ جزء صحیحی از CD هر قدر هم کوچک تصور کنیم بعده مرات صحیح در AB نگنجد و در این حالت گوئیم AB و CD مقیاس مشترک ندارند و نسبت بهم اصم هستند و آنوقت بجای اندازه گرفتن طول AB دو طول دیگر AE و AF را که نسبت به CD منطق و یکی کوچکتر و دیگری بزرگتر از AB باشند اندازه میگیریم و آنها را اندازه های تقریبی AB گوئیم که یکی نقصانی و دیگری اضافی است



شکل ۱۳۶

مثلاً باز فرض میکنیم واحد CD بر ۷ جزء متساویه قسمت شده باشد و AB بزرگتر از ۱۲ مرتبه و کوچکتر از ۱۳ مرتبه از یک جزء از آن اجزا باشد یعنی واقع گردد مابین $AE = \frac{12}{7} CD$ و $AF = \frac{13}{7} CD$ پس اعداد $\frac{12}{7}$ و $\frac{13}{7}$ اندازه های تقریبی AB میباشند که یکی نقصانی و دیگری اضافی است و این دو طول شامل AB باشند و اختلافشان بقدر $\frac{1}{7}$ واحد است و اختلاف هر کدامشان از AB کمتر از $\frac{1}{7}$ میباشد و بهمین جهة دو عدد $\frac{12}{7}$ و $\frac{13}{7}$ را اندازه های تقریبی AB گوئیم تا کمتر از $\frac{1}{7}$ تقریب بطور کلی هرگاه فرض کنیم واحد CD بر m جزء متساویه قسمت شده باشد و AB بزرگتر از m مرتبه و کوچکتر از $m+1$ مرتبه از یک جزء از آن اجزاء باشد

پس اختلاف هریک از اندازه های $AE=\frac{m}{n}CD$ و $AF=\frac{m}{n}CD$ از AB
کمتر از $\frac{1}{n}$ واحد CD خواهد بود و این دو عدد را اندازه های تقریبی AB گوئیم
تا کمتر از $\frac{1}{n}$ تقریب؛ باید دانست که عدد n یعنی عدهٔ اجزای متساویهٔ واحد را
همواره میتوان آنقدر بزرگ و بزرگتر گرفت چنانکه اگر یکی از دو عدد $\frac{m}{n}$ یا $\frac{m+1}{n}$ را
برای اندازهٔ طول AB اختیار کنیم خطای حاصله آنقدر جزئی و ناقابل باشد
که بخواهیم و هم باید ملتفت بود وقتیکه n بی نهایت ترقی کند، و طول AE و AF
اختلافشان از AB مقداری شود آنقدر کوچک و بی نهایت صغیر که بخواهیم و این
دو طول متدرجاً میل کنند بسمت حد مشترکی که همان طول AB باشد و ضمناً اعداد $\frac{m}{n}$
$\frac{m+1}{n}$ نیز که اندازه های آن دو طول هستند میل کنند بسمت یک حد مشترکی که نه عدد صحیح است
و نه عدد کسری (چونکه بفرض ما هیچ جزء صحیحی از CD بعدهٔ مرات صحیح در AB نمیگنجد)
پس چنین حد را عدد اصم گویند و در حقیقت همین حد شایسته است که اندازهٔ واقعی
AB گرفته شود (در صورتیکه CD واحد باشد) ولی چون این حد نه عدد صحیح و نه
کسری است لهذا در محاسبات عوض آن اندازه تقریبی آنرا اختیار کنیم

۲۲۸- نسبت دو مقدار از یک جنس A و B عبارت است از اندازهٔ مقدار اول
در صورتیکه مقدار ثانی B را واحد فرض کرده باشیم و چنین نمائیم $\frac{A}{B}$ و اگر این

دو مقدار نسبت بهم منطق باشند و A شامل m جزو از n جزو B باشد وآن را
چنین مینویسیم $\frac{A}{B} = \frac{m}{n}$ و اگر A و B نسبت بهم اصم باشند یعنی مقیاس مشترک
نداشته باشند و A بیشتر از m مرتبه و کمتر از m+1 مرتبه یکی از n جزو B را
شامل باشد در این حالت نسبت $\frac{A}{B}$ واقع گردد ما بین $\frac{m}{n}$ و $\frac{m+1}{n}$ که اندازهای
تقریب نقصانی و اضافی A میباشند وانرا چنین مینویسیم $\frac{m}{n} < \frac{A}{B} < \frac{m+1}{n}$

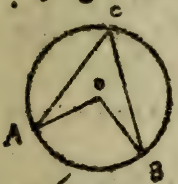
۲۱۹- هرگاه دو مقدار متجانس A و B نسبت بهم اصم باشند و همچنین C و D نیز
دو مقدار متجانس و اصم دیگر باشند گوئیم نسبت $\frac{A}{B}$ مساویست با نسبت $\frac{C}{D}$ وقتیکه
دو مقدار تقریبی نسبت اول تا کمتر از $\frac{1}{n}$ تقریب برابر باشد با دو مقدار تقریبی نسبت
دوم تا کمتر از $\frac{1}{n}$ تقریب (هرچه باشد n)

۲۲۰- طریقه که برای اندازه گرفتن مقادیر بر سبیل مثال در تعیین اندازه قطعه خطها
مذکور داشتیم کلی است و در تقدیر زوایا وقسی و سایر مقادیر هندسیه نیز بهمان طریق
عمل میکنیم و در تقدیر قوسها باید ملتفت بود که قوس اندازه گرفتنی و قوس واحد
هر دو بیک شعاع باشند یعنی هر دو متعلق بیک دایره یا دو دایره متساویه باشند

۲۲۱- تعریف - اندازه هر زاویه عبارتست از نسبت آن زاویه بواحد زاویه
عموماً واحد زاویه را قائمه میگیرند و چون نقل کردن زاویه بر زاویه دیگر برای مقایسه آنها

بیکدیگر مستقیماً عملی است بسیار سخت و ناراحت لهذا از روی قضایای ذیل میتوان مقایسه دو زاویه را بسنجیدن دو قوس واقع مابین اضلاع تبدیل نمود چونکه مقایسه قوسها بسیار سهل و آسان است و قوسهای مرسومه بیک شعاع مانند خطوط مستقیمه بر یکدیگر منطبق شوند

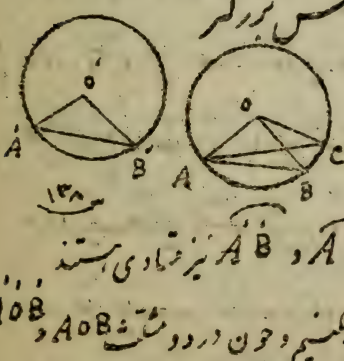
۲۲۲- **تعریف** – زاویهٔ مرکزیه در دایره آنست که رأسش واقع باشد بر مرکز دایره مانند زاویهٔ $\widehat{AOB}$ ص ۱۳۷ – زاویه محاطیه در دایره آنست که رأسش واقع باشد بر محیط و حادث باشد مابین دو وتر مثل زاویهٔ $\widehat{ACB}$



ص ۱۳۷

قضیهٔ ۱۲

۲۲۳- در یکدایره یا در دو دایرهٔ متساویه هرگاه دو زاویهٔ مرکزیه متساوی باشند دو قوس مقابل آنها متساوی هستند و اگر دو زاویهٔ مرکزیه مختلف باشند قوسهای مقابل نیز مختلفند و زاویهٔ بزرگتر مقابل است بقوس بزرگتر



ص ۱۳۸

اولاً فرض میکنیم در دو دایرهٔ متساویه O و O' دو زاویهٔ مرکزیه AOB و $A'O'B'$ متساوی باشند گوئیم دو قوس مقابلشان $\widehat{AB}$ و $\widehat{A'B'}$ نیز متساوی هستند

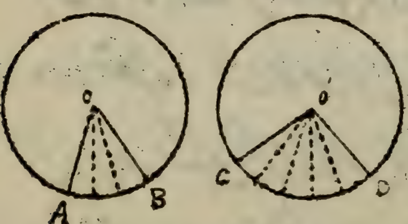
برهان – دو وتر AB و $A'B'$ را وصل میکنیم و چون در دو مثلث AOB و $A'O'B'$

دو ضلع و زاویهٔ بینهما متساوی هستند پس این دو مثلث متساوی میشوند و ضلع AB
متساوی شود بضلع A'B' پس دو قوس $\widehat{AB}$ و $\widehat{A'B'}$ نیز متساوی میگردند
ثانیاً فرض میکنیم زاویهٔ AOC اعظم باشد از زاویهٔ A'O'B' گوئیم $\widehat{CA} > \widehat{A'B'}$
برهان - زاویهٔ AOB را مساوی زاویهٔ A'O'B' جدا میکنیم ص ۱۳۸ و بنا بحالت اول
دو قوس $\widehat{AB}$ و $\widehat{A'B'}$ نیز متساوی میشوند و چون زاویهٔ AOB کوچکتر است از زاویهٔ
$\widehat{AOC}$ خط OB واقع میشود در درون زاویهٔ AOC و نقطه B واقع گردد بر قوس
AC پس $\widehat{AC} > \widehat{AB}$ و چون $AB = A'B'$ پس $\widehat{AC} > \widehat{A'B'}$

۲۲۴- بالعکس - در یک دایره یا دو دایرهٔ متساویه اولاً هرگاه دو قوس
متساوی باشند دو زاویهٔ مرکزیهٔ مقابل آنها متساوی هستند ثانیاً هرگاه دو قوس مختلف باشند
دو زاویهٔ مرکزیهٔ مقابل نیز مختلفند و قوس بزرگتر مقابل است بزاویهٔ بزرگتر

قضیهٔ ۱۳

۲۲۵- در یک دایره یا دو دایرهٔ متساویه نسبت دو زاویهٔ مرکزیه
مساویست با نسبت دو قوس
واقع مابین اضلاع آنها



در دو دایرهٔ متساویهٔ O و O' ص ۱۳۹

ص ۱۳۹

دو زاویه مرکزیه $\widehat{AOB}$ و $\widehat{CO'D}$ مقابلند بدو قوس AB و CD گوئیم $\frac{AB}{CD}=\frac{AOB}{CO'D}$

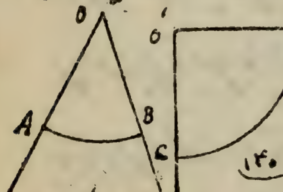
برهان - فرض میکنیم دو قوس AB و CD مقیاس مشترکی داشته باشند و آن ۳ مرتبه در AB بگنجد و ۵ مرتبه در CD و از این قرار نسبت قوس AB بقوس CD مساوی است با $\frac{3}{5}$ و آنرا چنین نویسیم $\frac{\widehat{AB}}{\widehat{CD}}=\frac{3}{5}$ و بعد از مرکز O و O' بتمام نقاط تقسیم آن دو قوس وصل میکنیم زاویه $\widehat{AOB}$ قسمت شود بر ۳ زاویه و $CO'D$ بر ۵ زاویه تمام این زوایا مساویند چونکه مقابلند بقسی متساویه پس نسبت زاویه AOB به زاویه $CO'D$ نیز مساویست با $\frac{3}{5}$ و آن را چنین نویسیم $\frac{\widehat{AOB}}{\widehat{CO'D}}=\frac{3}{5}$ پس معلوم شد که نسبت دو زاویه مرکزیه مثل نسبت دو قوس واقع مابین اضلاع آنهاست یعنی $\frac{AOB}{CO'D}=\frac{AB}{CD}$ و هرگاه مقیاس مشترک دو قوس AB و CD هر قدر هم که کوچک باشد باز قضیه فوق محقق است یعنی همواره میتوان قوسی بقدر کفایت کوچکتر که بخواهیم اختیار نمود که بقدره قرائت صحیح بدون خطای محسوسی در هر کدام از دو قوس مفروض بگنجد کلیةً وقتیکه دو قوس مفروض نسبت بهم اصم باشند یعنی مقیاس مشترک نداشته باشند باز قضیه مذکوره محقق است

* ۲۲۶ - **تبصره** - قسمت اخیر قضیه فوق را در دوره دوم هندسه میتوان بطریق ذیل مبرهن نمود فرض میکنیم دو قوس AB و CD مقیاس مشترک نداشته باشند یعنی اصم باشند در این حالت قوس AB را بر یک عدد مثلاً بر ۱۰۰ جزء متساویه قسمت

نمائیم و فرض میکنیم قوس CD بیشتر از m جزء و کمتر از m + 1 جزء از آن اجزاء را شامل باشد پس مقادیر تقریبی نسبت $\frac{AB}{CD}$ عبارت خواهد بود از $\frac{m}{n}$ و $\frac{m+1}{n}$ با کمتر از $\frac{1}{n}$ تقریب نقصانی و اضافی و بعد از مرکز O و O' بنقاط تقسیم آن دو قوس وصل میکنیم زاویه $\widehat{AOB}$ بر m جزء متساویه قسمت میشود و زاویهٔ $\widehat{CO'D}$ بیشتر از m جزء و کمتر از m + 1 جزء از آن اجزاء را شامل میشود پس مقادیر تقریبی نسبت $\frac{\widehat{AOB}}{\widehat{CO'D}}$ نیز عبارت باشند از $\frac{m}{n}$ و $\frac{m+1}{n}$ با کمتر از $\frac{1}{n}$ تقریب نقصانی و اضافی پس وقتیکه مقادیر تقریبی دو نسبت فوق با کمتر از $\frac{1}{n}$ تقریب برابر شدند خود آن دو نسبت نیز متساوی میگردند یعنی $\frac{\widehat{AB}}{\widehat{CD}} = \frac{\widehat{AOB}}{\widehat{CO'D}}$

قضیهٔ ۱۴

۲۲۷ - مقیاس و اندازه زاویهٔ مرکزیه مساویست بمقیاس و اندازهٔ قوس محصور مابین ضلعین آن زاویه



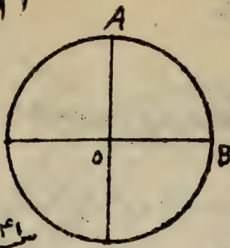
س ۱۴۰

فرض میکنیم مقصود اندازه گرفتن زاویهٔ $\widehat{AOB}$ باشد

س ۱۴۰ از رأس O بشعاع اختیاری قوسی مانند AB محصور مابین ضلعین آن زاویه رسم میکنیم و بعد زاویه قائمه مثل $\widehat{CO'D}$ نیز رسم نمائیم و از رأس آن بهمان شعاع قوس CD محصور مابین ضلعین آن رسم کنیم و بنا بتعریف (نمرهٔ ۲۲۱) اندازهٔ زاویهٔ

$\widehat{AOB}$ عبارتست از نسبت $\frac{\widehat{AOB}}{\widehat{CO'D}}$ در صورتیکه زاویهٔ قائمه $CO'D$ واحد زاویه باشد
و همچنین بنا بتعریف اندازهٔ قوس AB نیز عبارتست از نسبت $\frac{\widehat{AB}}{\widehat{CD}}$ مشروط
بر آنکه قوس CD را واحد قوس گرفته باشیم و در قضیهٔ سابقه ثابت کردیم
که این دو نسبت متساوی هستند یعنی $\frac{\widehat{AOB}}{\widehat{CO'D}} = \frac{\widehat{AB}}{\widehat{CD}}$ پس مقیاس و اندازه زاویه
AOB همان مقیاس و اندازهٔ قوس AB است در صورتیکه قوس مقابل
بواحد زاویه را واحد قوس فرض کرده باشیم یعنی عموماً قوس مقابل بزاویهٔ قائمه
مرکزیه را . اغلب تناظر و تقابل واحدها را حذف نموده عبارت فوق را بطور ناقص
ومختصر چنین ادا کنند مقیاس زاویه مرکزیه قوس مقابل اوست

۲۲۸ — تقسیم محیط دایره — از روی قضیهٔ فوق معلوم شد که برای اندازه
گرفتن هر زاویه کافی است که قوس محصور مابین ضلعین آن زاویه را اندازه گرفت
پس نسبت این قوس بقوس واحد عبارت خواهد بود از مقیاس بزاویهٔ مفروضه
و بنا براین هرگاه زاویه قائمه را واحد زاویه فرض کنیم باید قوس مقابل بزاویهٔ
قائمه مرکزیه را واحد قوس اختیار نمود و این قوس واحد برابر است با ربع محیط دایره
زیرا که در دایره دو قطر عمود بر یکدیگر محیط را بچهار جزء متساویه قسمت کنند (ش ۱۴۲)
که هر کدام ربع محیط دایره و قوس مقابل بزاویهٔ قائمه مرکزیه است و چون ربع محیط را ۹۰

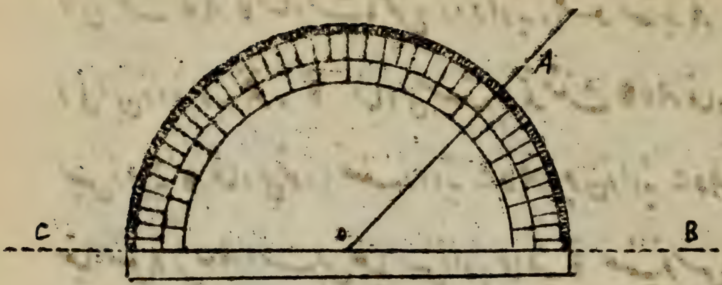


شکل ۱۴۱

فرض میکنیم اندازهٔ هر قوس اغلب بعد کسری نموده میشود پس در عملیات محض تسهیل مقایسه واحدهای دیگر احتیاج کنند از این قرار تمام محیط دایره را ۳۶۰ جزء متساویه قسمت کنند (تقسیم ستینی) و هر جزء را واحد قوس قرار داده درجه (°) گویند پس نصف دایره ۱۸۰ درجه و ربع دایره ۹۰ درجه است و هر درجه را به ۶۰ دقیقه (′) قسمت کنند و هر دقیقه را به ۶۰ ثانیه (″) و قوسهای کوچکتر از ثانیه را با عشار ثانیه اندازه گیرند مثلاً قوس ۷۶ درجه و ۲۷ دقیقه و ۴۳ ثانیه و ۵۲ ر۰ ثانیه را چنین نویسند ۵۲ ر۴۳″ و ۲۷′ و ۷۶° و هر زاویه مرکزیه که قوس مقابلش یک درجه یا یک دقیقه یا یک ثانیه باشد آن را زاویهٔ یک درجه یا یک دقیقه یا یک ثانیه گویند و اگر مثلاً قوس مقابل بزاویه مرکزی ۳۴″ و ۲۵′ و ۷۸° باشد خود آن زاویه نیز ۳۴″ و ۲۵′ و ۷۸° است و زاویهٔ قائمه معادل ۹۰ درجه است و اگر زاویه قائمه را واحد زاویه و ربع دایره را واحد قوس فرض کنیم آنوقت اگر قوسی مثلاً ۲۸ درجه یا ۲۸/۹۰ ربع دایره باشد زاویهٔ مرکزیه مقابلش نیز ۲۸/۹۰ زاویه قائمه خواهد بود و آن را مختصراً همان زاویه ۲۸ درجه گوئیم و مجموع دو زاویهٔ متمم معادل ۹۰° و مجموع دو زاویهٔ مکمل مساوی ۱۸۰° است و سه زاویهٔ هر مثلث مجموعاً ۱۸۰ درجه است

۲۲۹ ـ تبصره ـ این ایام غالباً تقسیم اعشاری محیط دایره نیز بسیار متداول است
از این قرار ربع دایره را به ۱۰۰ اجزو متساویه قسمت کنند و هر جزو را گراد گویند
پس نصف دایره معادل ۲۰۰ گراد و ربع دایره ۱۰۰ گراد است و هر گراد را بر
۱۰۰ دقیقه و هر دقیقه را به ۱۰۰ ثانیه قسمت کنند قوسها و زوایا را بحسب گراد
و دقایق و ثوانی آن تقدیر نمایند امتیاز این تقسیم آنست که محاسبات عدد
در آن مانند اعداد اعشاری مجرا میشود مثلاً قوس یا زاویه ۹۴ گ و ۶۷ د و ۳۸ ث
چنین نوشته میشود ۹۴٫۶۷۳۸

۲۳۰ ـ نقاله ـ زوایا را در عملیات بتوسط آلت نقاله اندازه میگیرند و آن
عبارتست از یک نیم دایره مادی طلقی یا شاخی شفاف یا فلزی میان پر یا میان
خالی و نصف محیط یا لب آن به ۱۸۰ درجه قسمت شده و تقسیمات را بالمضاعف
قرار داده اند تا اینکه بتوان درجات را ابتدا از هر دو طرف قوس حساب نمود
و بنابراین هر نقطه تقسیم شامل دو عدد از درجات است که مجموعشان ۱۸۰ درجه باشد
و برای اندازه گرفتن زاویه AOB مرکز نقاله را بر نقطه O و قطر آن را بر
استقامت OB قرار میدهیم و آنوقت کافی است که قسمت تحتانی (شکل ۲۴۴) را
که ضلع دوم OA بر آن گذشته است خوانده اگر بخواهیم زاویه AOC را ما

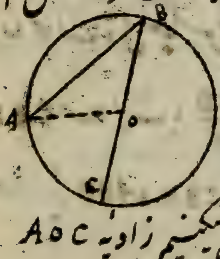


ش ۱۴۲

اندازه بگیریم کافی است که قسمت فوقانی (ع ۱۳) که نظیر همان نقطه سابق است
خوانده این دو زاویه مکمل یکدیگرند و اغلب برای تسهیل استعمال نقاله آنرا بشکل مربع
مستطیل سازند اما قبل از استعمال نقاله اول باید صحت آنرا امتحان نمود بدینطریق
که زاویه معینی بر صفحه کاغذ رسم کنیم و مرکز نقاله را برابر رأس آن زاویه قرار دهیم
و نقاله را در حول این نقطه دوران دهیم پس اگر تقسیمات نقاله صحیح باشند باید
عدد تقسیمات محصور مابین ضلعین زاویه ثابت باشد

قضیه ۱۵

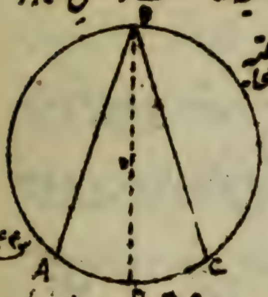
۲۳۱- مقیاس زاویه محاطیه مساویست بنصف قوس واقع
مابین ضلعین آن زاویه



ش ۱۴۳

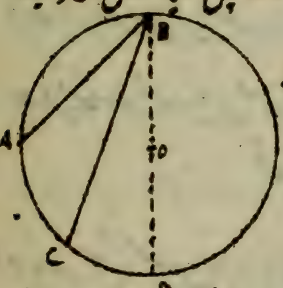
اولاً فرض میکنیم که یکی از اضلاع زاویه محاطیه
(ش ۱۴۳) از مرکز o گذشته باشد شعاع AO را وصل میکنیم زاویه AOC

خارج مثلث OAB مساویست با مجموع دو زاویه داخله متقابله $\hat{A}$ و $\hat{B}$
ولی این دو زاویه $\hat{A}$ و $\hat{B}$ متساوی هستند چونکه مثلث AOB متساوی الساقین است
پس زاویه B مساوی شود با نصف زاویه AOC و چون زاویه AOC مرکزی است
مقیاسش قوس AC است پس مقیاس زاویه محاطیه $\hat{B}$ نصف قوس AC است



ش ۱۴۴

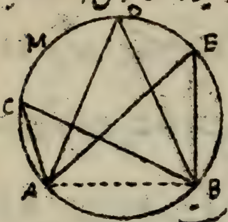
ثانیاً فرض میکنیم مرکز دایره O مابین اضلاع زاویه محاطیه
ABC واقع شود قطر BD را رسم میکنیم
ش ۱۴۴ و بنا بحالت اول مقیاس زاویه ABD
مساویست با $\frac{AD}{2}$ و مقیاس زاویه DBC مساویست با $\frac{DC}{2}$ و چون زاویه
ABC مساویست با مجموع دو زاویه ABD و DBC پس مقیاسش مساویست
با مجموع $\frac{DC}{2} + \frac{AD}{2}$ یعنی $\frac{AC}{2}$



ش ۱۴۵

ثالثاً فرض میکنیم مرکز دایره O در خارج زاویه
محاطیه AB واقع شود ش ۱۴۵ قطر BD را وصل میکنیم
و بنا بحالت اول مقیاس زاویه ABD مساویست با $\frac{AD}{2}$ و مقیاس زاویه
CBD مساویست با $\frac{CD}{2}$ و چون زاویه محاطیه ABC مساویست با تفاضل
دو زاویه ABD و CBD پس مقیاسش مساویست با تفاضل $\frac{AD}{2} - \frac{CD}{2}$ یا $\frac{AC}{2}$

۲۳۲ــ نتیجه ۱ــ جمیع زوایای محاطیه در یک قطعه دایره متساوی هستند زیرا

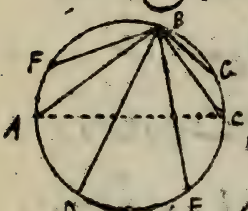


که مقیاسشان نصف یک قوس AB است ش ۱۴۶

هرگاه $\hat{C}$ و $\hat{D}$ و $\hat{E}$ مثلاً زوایای ۶۰ درجه باشند

گوییم که قطعه دایره AMB قابل احتوای زاویه ۶۰ درجه است

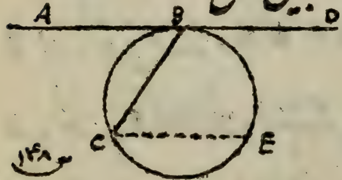
۲۳۳ــ نتیجه ۲ــ هر زاویه محاط در نصف دایره قائمه است و هر زاویه محاط در قطعه بزرگتر از نصف دایره حاده است و هر زاویه محاط در قطعه کوچکتر از نصف دایره منفرجه است زیرا که مقیاس زاویه اول ABC ش ۱۴۷ نصف



نیم دایره است و مقیاس زاویه دوم DBE نصف قوس DE است که کوچکتر باشد از نیم دایره و مقیاس زاویه سوم FBC نصف قوس CDF است که بزرگتر باشد از نیم دایره

قضیهٔ ۶۱

۲۳۴ــ مقیاس زاویه حادثه مابین ظل و وتر نصف قوس



واقع مابین ضلعین آن زاویه است

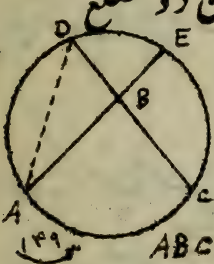
زاویه ABC حادثه مابین ظل (خط مماس) و وتر BC مفروض است ش ۱۴۸ وتر CE را بموازات AB رسم کنیم

قوس BE مساوی میشود بقوس BC و دو زاویهٔ متبادلهٔ داخله ABC
و BCE نیز مساوی هستند و مقیاس زاویه محاطیه BCE نصف قوس BE
یا نصف قوس BC است پس مقیاس زاویهٔ ABC که مساوی زاویهٔ
BCE است نیز نصف قوس BC باشد

زاویهٔ CBD که مکمل زاویه ABC است مقیاسش نصف تمام محیط دایره منهای
نصف قوس BC است و یا نصف قوس CEB واقع مابین ضلعینش

قضیهٔ ۱۷

۲۳۵ — مقیاس زاویهٔ که رأسش واقع باشد در درون دایره مساویست بنصفِ مجموع قوسِ واقع مابین ضلعین آن زاویهٔ و قوسِ واقع مابین امتداد آن دو ضلع



زاویهٔ ABC واقع است در درون دایرهٔ ش ۱۴۹

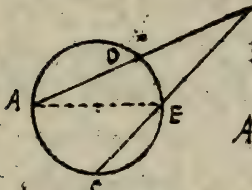
اضلاع AB و CB را امتداد میدهیم تا در نقطهٔ D و E مجدد را تلاقی کنند و بعد خط DA را وصل میکنیم زاویهٔ ABC

ش ۱۴۹

خارج مثلث ADB مساویست بمجموع دو زاویهٔ داخلهٔ متقابلهٔ $\hat{A}$ و $\hat{D}$ پس مقیاسش
نصفِ قوسِ DE باضافهٔ نصفِ قوسِ AC است یعنی $\frac{DE}{2}+\frac{AC}{2}$ یا $\frac{AC+DE}{2}$

قضیّه ۱۸

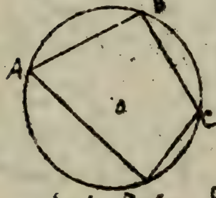
۲۳۶- مقیاس زاویهٔ که رأسش در خارج دایره است مساویست بنصف تفاضل قوسهای واقع مابین ضلعین آن زاویه



رأس زاویه ABC واقع است در خارج دایره ش ۱۵۱ وتر AB را وصل میکنیم زاویهٔ AEC خارج مثلث ABE مساویست بمجموع دو زاویهٔ داخله A و B پس زاویهٔ B مساویست بزاویهٔ AEC منهای زاویهٔ A و بنا براین مقیاسش مساویست بنصف قوس AEC منهای نصف قوس DE

قضیّه ۱۹

۲۳۷- در هر ذو اربعة اضلاع محاطی هر دو زاویهٔ متقابله مکمل یکدیگرند و بالعکس اگر در ذو اربعة اضلاعی دو زاویهٔ متقابله مکمل یکدیگر باشند آن شکل قابل محاط شدن در دایره است



اولاً فرض میکنیم ذو اربعة اضلاع ABCD ش ۱۵۱ محاط باشد در دایره O یعنی تمام رؤسش واقع باشند بر محیط دایره ش ۱۵۱ پس مقیاس زاویهٔ A میشود $\frac{BCD}{2}$ و مقیاس زاویهٔ C میشود $\frac{BAD}{2}$ پس مقیاس این دو زاویه مجموعاً چنین میشود $\frac{BCD+BAD}{2}$

یا نصف تمام محیط یعنی ۱۸۰ پس مکمل یکدیگرند و بهمین طریق ثابت میکنیم که دو زاویهٔ متقابله B و D نیز مکمل هستند

ثانیاً فرض میکنیم در ذواربعة اضلاع ABCD دو زاویهٔ متقابله A و C مکمل یکدیگر باشند گوئیم این شکل قابل محاط شدن در دایره است چون بر سه راس A و B و C یک دایره مرور دهیم این دایره بر D نیز خواهد گذشت زیرا که مقیاس زاویهٔ A نصف قوس BCD است پس مقیاس زاویهٔ C که مکمل اوست باید نصف قوس باقی BAD باشد پس راس C بالضروره باید واقع شود بر محیط دایره فهو المطلوب

مسائل و ترسیم اشکال هندسی

۲۳۸ — مسائل اصلیهٔ هندسه که حلشان منجر شود بترسیم خطوط مستقیمه و دایره مبنای ترسیم جمیع اشکال هندسی و نقشه کشی است

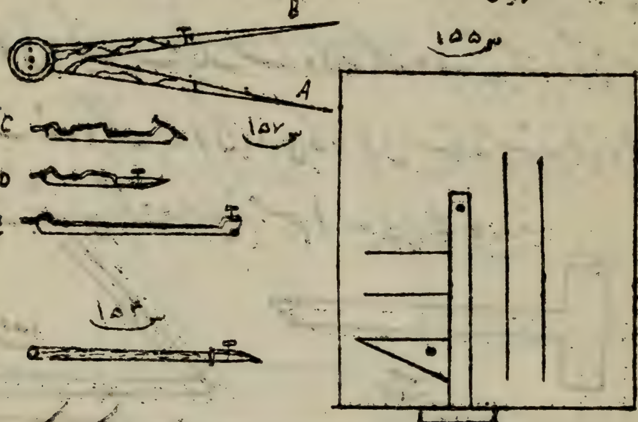
دو آلت اصلی لازم و کافی برای حل ترسیمی مسائل اصلیه تعلیمیه عبارتند از ستاره و پرکار — خطوط مستقیمه را بمدد ستاره رسم نمائید و ما سابقاً تعریف و قاعده استعمال آن را مذکور داشتیم (نمره ۱۶۹)

۲۳۹ — پرکار آلتی است مرکب از دو شاخه فلزی متساوی که از یکطرف منتهی

غتی شده اند بنوک باریک و از طرف دیگر بواسطه محوری بهم متصل گشته اند

س ۱۵۲ پرکار را برای برداشتن فواصل و رسم کردن دوایر و قوسها استعمال

کنند و فاصله مابین دو نوک شاخه های پرکار را فتحه پرکار خوانند – پرکار



دارای چند قطعه یدکی علیحده است از این قسم از یک نوک خشک و

یک مدادگیر C و یک خط کش D و یک یدک E

۲۴۰ – میان سایر آلات مفیده برای ترسیم اشکال هندسی باید آلت گونیا

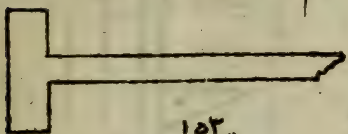
و نقاله را مقدم داشت و ما سابقاً تعریف و طریق استعمال آنها را بقدر کفایت

مذکور داشتیم (فقره ۱۷۰ و ۲۳) کلیةً برای اجرای تمام اعمال ترسیمی داشتن

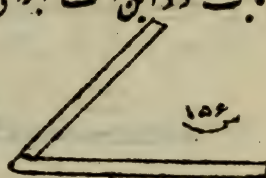
آلات ذیل بفایده نیست از این قرار یک (ت م س ۱۵۳) و یک خط کش

س ۱۵۴ و یک مسطره بیست سانتیمتری و یک تخته س ۱۵۵ و یک غلط گونیا

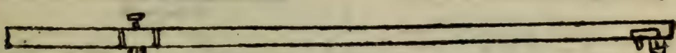
س۱۵۶ دیک پرکار طویل س۱۵۷ ۱ـ تِ آلتی است مرکب از دو ستارهٔ مسطح که عموداً بر یکدیگر متصل گشته و بشکل حرف (T) فرانسه است ـ غلط گونیا مرکب است از دو ستارهٔ متصله که میتوانند از یکدیگر بازگشته زوایا بمقادیر مختلفه تشکیل دهند ـ پرگار طویل مرکب است از یک ستاره که در یک طرف آن یک نوک ثابت و محکمی نصب شده و یک بند نوک داری که در طول ستاره میتواند بلغزد و هم بواسطهٔ پیچی ثابت شود این آلت را برای ترسیم قوسهای بزرگ بکار برند



س۱۵۳



س۱۵۶



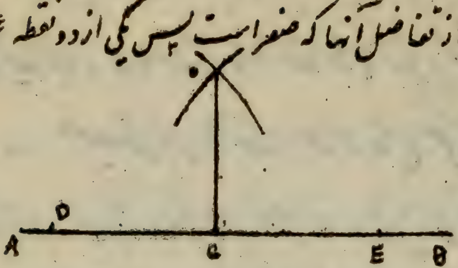
س۱۵۷

ترسیم خطوط عمود

۱۶۱ ـ مسئلهٔ ۱ ـ میخواهیم از نقطهٔ مفروضه بر خطی عمودی بر آن خط رسم کنیم

اولاً بوسیلهٔ پرگار و ستاره ـ نقطهٔ C بر خط AB مفروض است س۱۵۸ ۱ در روی AB ابتدا از نقطهٔ C دو طول متساویه CD و CE را بعد پرگار در طرفین این نقطه جدا کنیم و بعد دو نقطهٔ D و E را مرکز قرار داده بشعاعی اطول از نصف DE دو قوس رسم کنیم تا متقاطع شوند چونکه بعد المرکزین شان DE است

که مجموع دو شعاع اطول است از تفاضل آنها که صفر است پس یکی از دو نقطه



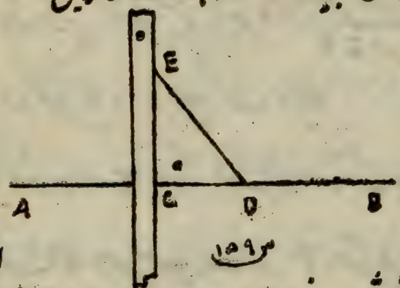
تقاطع را فرض میکنیم ه باشد

خط هc را بمدد ستاره رسم

میکنیم این خط عمود میشود بر وسط

ش ۱۵۸

DE چونکه هر کدام از دو نقطه ه و c بیک فاصله باشد از طرفین D و E



پس خط هc عمود است بر AB

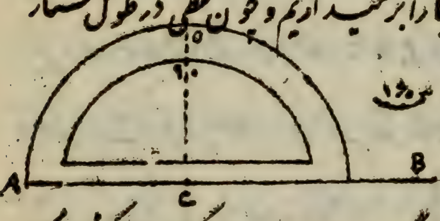
ثانیاً بمدد گونیا ــ راس زاویه قائمه

گونیا را در نقطه c چنان قرار میدهیم

ش ۱۵۹

که یکی از اضلاع گونیا مثلاً cD واقع شود بر خط AB ش ۱۵۹ و بعد ستاره را بر طول

ضلع Ec گونیا تکیه میدهیم ــ گونیا را بر میداریم و چون خطی در طول ستاره



رسم کنیم عمود مطلوب است

ش ۱۶۰

تبصره ــ ممکن است بدون استعمال

ستاره عمود مطلوب را در طول ضلع گونیا رسم نمود ولی ممکن است خطش در راس

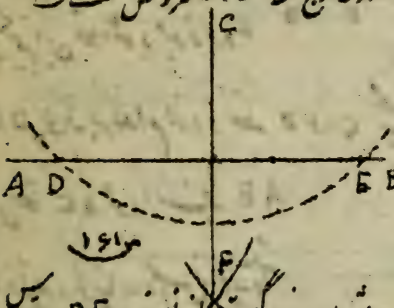
گونیا منحرف شود و علاوه براین عمود مطلوب را بمدد گونیا نمیتوان از آنطرف خط مفروض امتداد داد

ثالثاً بمدد نقاله ــ مرکز نقاله را بر نقطه c چنان قرار میدهیم که قطرش بر استقامت

AB واقع شود و نقطهٔ ٥ را در مقابل ۹۰ درجه نشان میکنیم ش ۱۶۰ و بعد ابتداء بعد نقاله را برمیداریم و بعد دستاره از نقطهٔ ٥ به C وصل میکنیم پس خط ٥C عمود مطلوب است.

۲۴۳ — مسئلهٔ ۲ — از نقطهٔ واقعه در خارج خطی میخواهیم عمودی بر آنخط فرود آوریم.

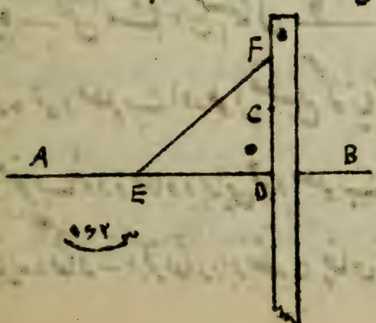
اوّلاً بمدد دستاره و گونیا — نقطهٔ C در خارج خط AB مفروض است مرا و اقتضر C را مرکز قرار داده بشعاعی بقدر کفایت بزرگ قوسی رسم میکنیم تا خط AB را



ش ۱۶۱

در دو نقطه D و E قطع کند و این دو نقطه D و E را مرکز قرار داده بشعاعی بزرگتر از نصف DE دو قوس در تحت AB رسم میکنیم تا در نقطهٔ F متقاطع شوند چونکه بعد المرکزین اقصر است از مجموع دو شعاع و اطول است از تفاضل آنها و بعد نقاط C و F را بمدد دستاره بیکدیگر وصل میکنیم و خط CF عمود میشود بر وسط DE چونکه هر کدام از دو نقطهٔ C و F بیک فاصله است از طرفین D و E پس خط CF عمود است بر AB

ثانیاً بمدد گونیا — یکی از اضلاع زاویهٔ قائمهٔ گونیا را بر خط AB قرار میدهیم و گونیا را در کنار این خط بمدد دستاره

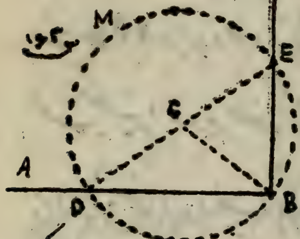


ش ۱۶۲

ثابت میلغزانیم تا اینکه ضلع دیگر زاویهٔ قائمه بگذرد بر نقطه C پس خط CD مرسوم
در کنار این ضلع گونیا مستقیماً یا بعد دستاره عمود مطلوب است

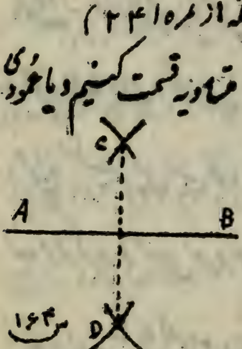
۲۴۳- مسئلهٔ ۳- میخواهیم عمودی رسم کنیم بر طرف خطی که نتوان امتداد

ش ۶۲



داد فرض میکنیم نقطه B طرف خط AB باشد که نتوان
امتداد داد نقطه مانند C در خارج خط AB
اختیار کرده مرکز قرار میدهیم و شعاعی برابر
CB دایره رسم میکنیم تا خط AB را در نقطهٔ D قطع کند و از نقطه D به C وصل میکنیم
و DC را امتداد میدهیم تا دایرهٔ را در نقطه E ملاقی کند پس خط EB عمود مطلوبست
زیرا که زاویه DBE قائمه است چونکه مقابلش نصف نیم دایره DME است برای
ترسیم این مسئله استعمال گونیا نیز ممکن است مانند مسئلهٔ ا از نمره ۲۴۱)

۲۴۴- مسئلهٔ ۴- میخواهیم قطعهٔ خطی را بدو جزء متساوی قسمت کنیم و یا عمودی

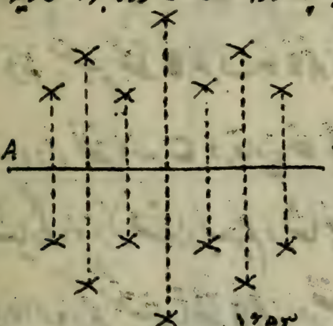


ش ۶۴

در وسط قطعهٔ خطی اخراج کنیم - خط AB مفروض است
ش ۶۳ نقطه A را مرکز قرار داده شعاعی بزرگتر از
نصف AB دو قوس یکی در فوق و دیگری در تحت
AB رسم میکنیم و از نقطهٔ B باز بهمان شعاع دو قوس دیگر رسم میکنیم تا دو قوس اول را

در c و d قطع کنند و بعد بمدد ستاره خط cd را رسم میکنیم این خط عمود شود بر وسط AB زیرا که هر کدام از دو نقطهٔ c و d بیک فاصله است از A و B طرفین خط AB

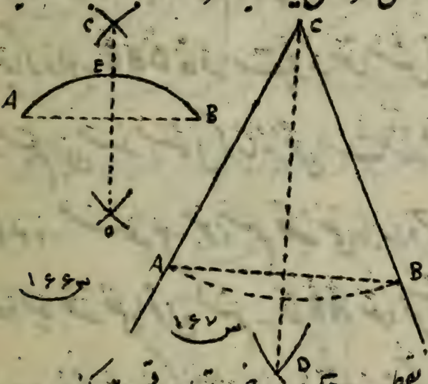
۴۲۵ - مسئله ۵ - میخواهیم خطی را بر چهار و هشت و شانزده جزء متساویه قسمت کنیم



س ۱۶۵

ابتدا خط AB را بر دو جزء متساویه قسمت میکنیم و بعد هر نصفهٔ آن را بر دو جزء متساویه و بعد هر کدام از اجزای جدید را بر دو جزء متساوی و هکذا

۴۲۶ - مسئله - میخواهیم قوس مفروض یا زاویهٔ مفروضه را بر دو جزء متساویه قسمت کنیم



س ۱۶۶ س ۱۶۷

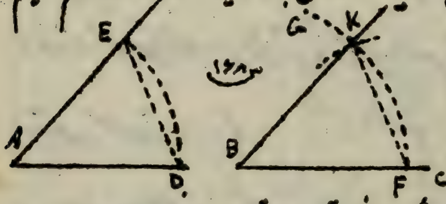
اولاً قوس AB مفروض است س ۱۶۶ - وتر AB را وصل میکنیم و عمود cd را بر وسط این وتر اخراج میکنیم پس این عمود مرور کند بر مرکز و قوس مفروض را در نقطهٔ E بر دو جزء متساویه قسمت کند

ثانیاً زاویهٔ ACB مفروض است س ۱۶۷ راس C را مرکز قرار داده بشعاع اختیاری قوسی رسم میکنیم تا ضلعین زاویه را در A و B قطع کند و بعد نقطهٔ A و B را

مرکز قرار داده بشعاعی بزرگتر از نصف وتر AB دو قوس رسم میکنیم تا در نقطهٔ
D متلاقی شوند و از D به C وصل میکنیم پس خط CD منصف زاویهٔ ACB است
زیرا که این خط چون عمود است بر وسط وتر AB پس قوس AB و بعد زاویهٔ
ACB را بر دو جزء متساویه قسمت کند

ترسیم زوایا

۲۴۲- میخواهیم بر نقطهٔ از خطی زاویهٔ مساوی با زاویه مفروضه رسم کنیم



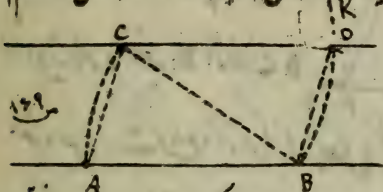
اولاً بمدد ستاره و پرکار-
زاویهٔ A و نقطه B از خط BC
مفروض است ش ۱۲۸ از مرکز A بشعاع اختیاری قوس غیر معین FG را
رسم میکنیم و بعد از قوس FG قوس FK را برابر قوس DE جدا میکنیم و خط BK را
وصل میکنیم زاویهٔ B مساوی میشود با زاویهٔ A زیرا که چون دو وتر FK و ED متساوی هستند
پس قوسهای مقابل آنها متساوی میشوند و بعد زوایای مرکزیه نیز متساوی میگردند
ثانیاً بمدد نقاله- زاویهٔ A مفروض است ش ۱۲۹ ابتدا آنرا با نقاله اندازه میگیریم
فرض میکنیم مثلاً ۳۰ درجه باشد و بعد مرکز نقاله را در نقطه B قرار میدهیم
بطریقی که قطرش بر استقامت BC واقع شود پس کافی است که در روی کاغذ

در کنار نقاله نقطهٔ K را در قسمت ۳۵ درجه نشان کنیم و بعد خط BK را
وصل کنیم پس زاویهٔ $\hat{B}$ نیز مانند زاویهٔ $\hat{A}$ معادل ۳۵ درجه است

ثانیاً بعد غلط گونیا — دو شاخه غلط گونیا را باز میکنیم بطریقیکه زاویهٔ مساوی با زاویهٔ $\hat{A}$ تشکیل شود و بعد یکی از شاخه های آن را بر خط CD قرار میدهیم و در طول شاخهٔ دیگر خط BK را رسم میکنیم

ترسیم خطوط متوازیه

۲۴۸- مسئلهٔ ۷- از نقطهٔ مفروضه میخواهیم خطی بموازات خط مفروضی رسم کنیم



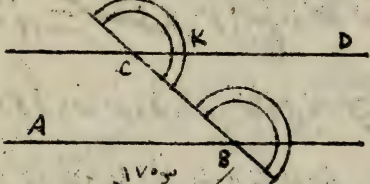
ش ۱۶۹

اولاً بعد دستاره و پرکار

نقطهٔ C و خط AB مفروض است ش ۱۶۹

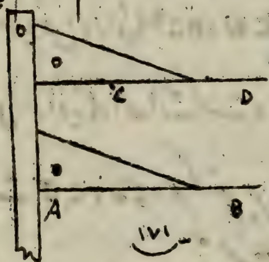
از مرکز C بشعاع اختیاری قوس غیر معین BK را رسم میکنیم تا خط AB را در نقطهٔ B قطع کند و بعد از مرکز بهمان شعاع قوس AC را نیز رسم میکنیم و از BK قوس BD را مساوی قوس AC جدا میکنیم باین طریق که از مرکز B بشعاع برابر وتر AC قوسی رسم کنیم تا BK را در D تلاقی کند و بعد CD را رسم میکنیم این خط موازی میشود با AB زیرا که در ذو اربعة اضلاع ABCD چون اضلاع مقابل متساوی هستند پس CD موازی است با AB و یا اینکه چون خط BC را وصل کنیم دو زاویهٔ مرکزیهٔ ABC

و BCD مقابل بدو قوس متساویه و در سوم به یک شعاع متساوی میشوند و چون این
دو زاویه متساویه نسبت بدو خط AB و CD و قاطع BC متبادله داخله اند پس



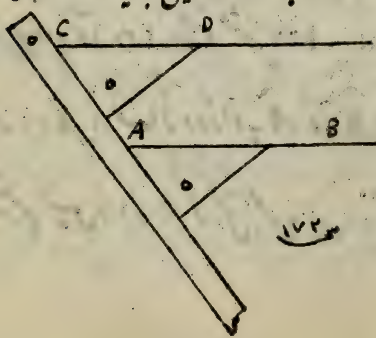
س ۱۷۰

دو خط CD و AB باید متوازی باشند
ثانیاً بمدد نقاله ــ خط غیر مشخص CB را
رسم میکنیم س ۱۷۰ و زاویهٔ CBA را با نقاله اندازه میگیریم و بعد بر نقطهٔ
C از خط CB زاویهٔ BCK را مساوی ABC بمدد نقاله رسم میکنیم پس خط CD



س ۱۷۱

که از نقطهٔ K مرور نماید موازی است با AB
ثالثاً بمدد گونیا ــ یکی از اضلاع زاویهٔ
قائمه گونیا را بر خط AB قرار میدهیم و دستی
بر ضلع دیگر گونیا تکیه دهیم و آنوقت گونیا را در کنار ستاره بلغزانیم تا آنکه ضلع
اوّل بگذرد بر نقطهٔ C پس خط CD را در طول این ضلع گونیا رسم کنیم موازی
شود با AB چونکه این دو خط هر دو عمودند بر ستاره یعنی بر یک خط پس
متوازی باشند ــ و نیز میتوان

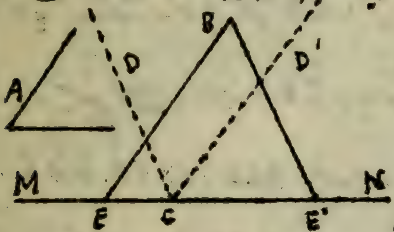


س ۱۷۲

وتر گونیا را بر AB قرار داد س ۱۷۱
و گونیا را بهمان طریق سابق لغزانید

و دو خط AB و CD موازی میشوند چونکه این دو خط باقب ستاره دو زاویهٔ متبادله داخله مساویه تشکیل دهند (و درانجا اگر ستاره طویل بکار بریم بهتر است)

۲۴۹ — مسئلهٔ ۸ – میخواهیم از نقطهٔ مفروضه B در خارج خط MN خطی مرور دهیم که با خط مفروض زاویهٔ مساوی با زاویهٔ مفروضه A احداث کند س ۱۷۳

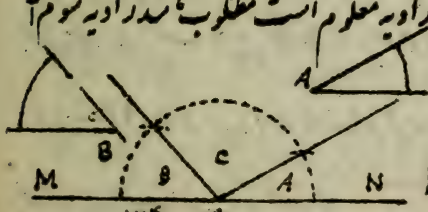


س ۱۷۳

از یک نقطهٔ غیر مشخص C از خط MN دو خط CD و CD' مرور میدهیم که با خط مفروض دو زاویهٔ DCM و D'CN مساوی با زاویهٔ A احداث کنند و بعد از نقطهٔ B دو خط BE' و BE را مرتباً بموازات CD و CD' رسم کنیم پس BE و BE' عبارتند از دو خط مطلوب

ترسیم مثلثات

۲۵۰ — مسئلهٔ ۹ – از مثلثی دو زاویه معلوم است مطلوب باشد زاویهٔ سوم آن

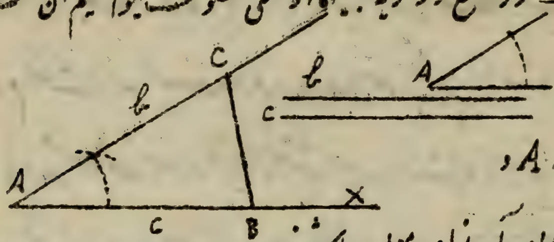


س ۱۷۴

دو زاویهٔ A و B از مثلثی معلومند س ۱۷۴ بر نقطهٔ O از خط غیر مشخص MN بعد ببرکار یا نقاله دو زاویه $\hat{A}$ و $\hat{B}$ را مرتباً مساوی با دو زاویهٔ مفروضه رسم میکنیم پس زاویهٔ C که مکمل مجموع این دو زاویه است عبارت باشد از زاویهٔ سوم

مثلث چونکه مجموع سه زاویه هر مثلث مساویست با دو قائمه

۲۵۱ - مسئلهٔ ا - دو ضلع و زاویه بینهما از مثلثی معلومست میخواهیم آن مثلث را رسم کنیم

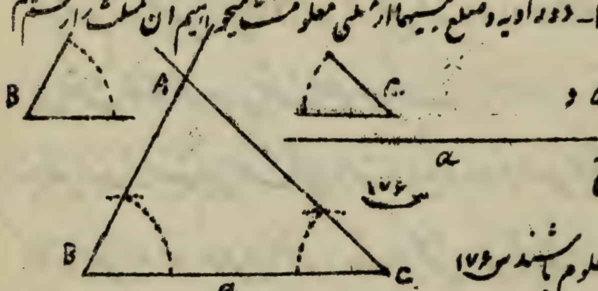


فرض میکنیم زاویه A و ضلع b و c مجاور بآن زاویه معلوم باشند

(شکل ۱۷۵)

خط غیر محدودی AX رسم میکنیم و بر نقطهٔ A زاویه مساوی زاویهٔ مفروضه میسازیم و بعد طول AB را مساوی ضلع c و طول AC را مساوی ضلع b جدا میکنیم و خط CB را وصل میکنیم پس مثلث ABC همان مثلث مطلوبست و حل ترسیمی این مسئله همواره ممکن است

۲۵۲ - مسئلهٔ اا - دو زاویه و ضلع بینهما از مثلثی معلومست میخواهیم آن مثلث را رسم کنیم



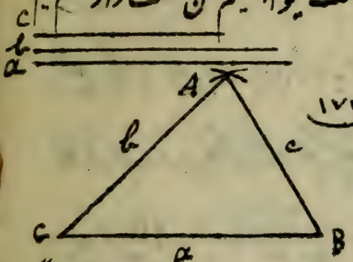
فرض میکنیم ضلع a و دو زاویه $\hat{B}$ و $\hat{C}$ مجاور بآن ضلع معلوم باشند (ش ۱۷۶)

از خط غیر محدودی طول BC را مساوی ضلع a جدا میکنیم و بر نقطهٔ B زاویهٔ ABC را مساوی زاویهٔ $\hat{B}$ رسم میکنیم و همچنین بر نقطه C زاویه BCA را مساوی زاویه $\hat{C}$ میسازیم پس مثلث ABC همان مثلث مطلوب است - برای اینکه این مسئله ممکن باشد باید

مجموع دو زاویهٔ مفروضه کمتر از دو قائمه باشد

۲۵۳- **تبصره** — هرگاه یکی از دو زاویهٔ مفروضه مجاور بضلع مفروض نباشد زاویهٔ سوم مثلث را مانند مسئلهٔ ۹ (نمره ۲۵۰) معلوم میکنیم باز مسئله براجع میشود بمسئلهٔ فوق

۲۵۴- **مسئلهٔ ۱۲** سه ضلع از مثلثی معلوم است میخواهیم آن مثلث را رسم کنیم



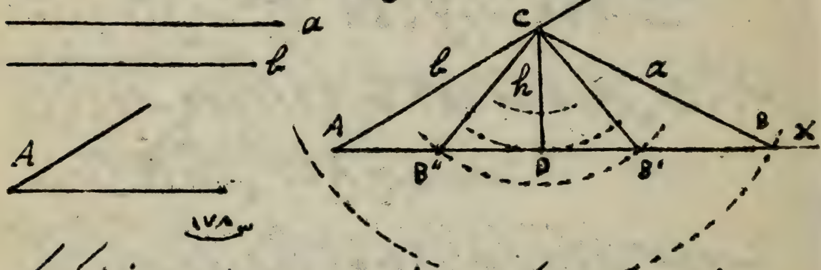
ش ۱۷۷

فرض میکنیم a و b و c سه ضلع مثلث مطلوب باشند از خط غیر محدودی طول BC را مساوی طول a جدا کنیم و از مرکز C بشعاع برابر ضلع b قوسی در فوق BC رسم کنیم و از مرکز B بشعاع برابر ضلع c قوس دیگر رسم کنیم تا قوس اول را در نقطه A قطع کند و دو خط AB و AC را وصل کنیم پس مثلث ABC همان مثلث مطلوب است

برای اینکه ترسیم این مثلث ممکن باشد باید که دو قوس مذکوره بتوانند متقاطع گردند پس باید خط المرکزین اقصر باشد از مجموع دو شعاع و اطول از تفاضل آنها یعنی $c-b < a$ و $c+b > a$ و اگر ضلع بزرگتر a را قاعده قرار دهیم بموارد مطمئن هستیم از داشتن $c-b < a$ پس تحقیق شرط اول کافی است

۲۵۵- **مسئلهٔ ۱۳**- از مثلثی دو ضلع و زاویهٔ مقابل بیکی از آن دو ضلع معلومست

میخواهیم آن مثلث را رسم کنیم — فرض میکنیم دو ضلع a و b و زاویهٔ $\hat{A}$ مقابل بضلع a معلوم باشند ش ۱۷۹ بر نقطهٔ A از خط غیر معین AX زاویهٔ CAX را مساوی زاویهٔ معلومهٔ A رسم میکنیم و طول AC را مساوی ضلع b جدا میکنیم و از مرکز C بشعاع برابر a قوسی رسم میکنیم تا خط AX را در نقطهٔ B قطع کند و خط BC را وصل میکنیم پس مثلث ABC همان مثلث مطلوبست زیرا که دو ضلع این مثلث مرتباً مساویند با a و b و ضلع CB مساوی a مقابل است بزاویهٔ $\hat{A}$



ش ۱۷۸

بحث — در این مسئله ممکن است چند حالت رخ دهد و میتوان فرض کرد که زاویهٔ $\hat{A}$ کوچکتر یا مساوی یا بزرگتر از ۹۰ درجه یعنی حاده یا قائمه یا منفرجه باشد و هم میتوان چنین فرض نمود $a = b$ و $a > b$ و $a < b$

اولاً فرض میکنیم $\hat{A} > 90$ و $b < a$ در این صورت چون از مرکز C بشعاع برابر a قوسی رسم کنیم این قوس از آنطرف نقطهٔ A بگذرد و AX را فقط در یک نقطه قطع میکند پس مسئله همواره یک جواب داد

ثانیاً فرض میکنیم $\hat{A} > 90^\circ$ و $h = a$ این حالت بعینه مانند حالت اول است بجز اینکه قوس مرسوم از C و بشعاع a بر نقطه A نیز مرور نماید و مثلث مطلوب متساوی الساقین میشود

ثالثاً فرض میکنیم $\hat{A} > 90^\circ$ و $h > a$ و در این فرض ممکن است سه حالت اتفاق افتد

(اولاً) قوس مرسوم از مرکز C خط AX را در نقطهٔ B' و B'' قطع کند و آنوقت دو مثلث $AB'C$ و $AB''C$ جواب مسئله باشند و علاوه بر این چون مثلث $CB'B''$ متساوی الساقین است زاویه $CB'A$ مکمل زاویه $CB''A$ است

(ثانیاً) قوس مرسوم از مرکز C با خط AX در نقطهٔ D مماس باشد و آنوقت فقط مثلث قائم الزاویه ACD جواب مسئله است

(ثالثاً) قوس مرسوم از مرکز C خط AX را قطع نکند و آنوقت مسئله جواب ندارد

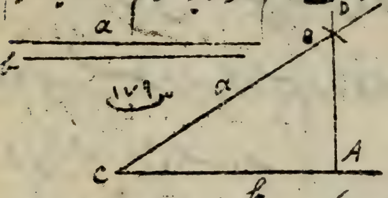
(رابعاً) فرض میکنیم $\hat{A} < 90^\circ$ و $h < a$ در این حالت قوس مرسوم از C خط AX را فقط در یک نقطه قطع کند و مسئله یک جواب دارد و زاویهٔ $\hat{B}$ کوچکتر از 90° است. خلاصه بحثهای فوق در جدول ذیل نموده شده است

اولاً $\hat{A} < 90^\circ$:
- $a \geq h$ — مسئله یک جواب دارد و $\hat{B} < 90^\circ$
- $a < h$:
  - $a > h$ — دو جواب و B' حاده و مکمل B'' است
  - $a = h$ — یک جواب و $\hat{B} = 90^\circ$
  - $a < h$ — جواب ندارد

ثانیاً $\hat{A} > 90°$ { a ≧ ج مسئله جواب ندارد ؛ a < ج یک جواب دارد

(که نمایش عمودی است که از نقطهٔ انتهای ضلع ج دارد بر ضلع دیگر زاویهٔ $\hat{A}$ مه)

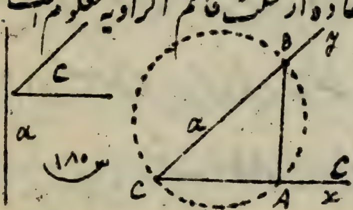
۲۵۶ — مسئله ۱۴ — وتر و یک ضلع از مثلث قائم الزاویه معلوم است میخواهیم آن مثلث را رسم کنیم — فرض میکنیم وتر a و ضلع ج مجاور بزاویهٔ قائمه معلوم باشند



(شکل ۱۷۹)

از خط غیر معینی طول AC را مساوی ج جدا میکنیم و از نقطهٔ A عمود AD را بر AC اخراج میکنیم و از مرکز C بشعاع برابر a قوسی رسم میکنیم تا AD را در نقطه B قطع کند وقتی BC را وصل میکنیم پس مثلث ABC همان مثلث مطلوب است

۲۵۷ — مسئلهٔ ۱۵ — وتر و یک زاویهٔ حادّه از مثلث قائم الزاویه معلوم است میخواهیم آن مثلث را رسم کنیم — فرض کنیم a وتر و $\hat{C}$ زاویهٔ حادّهٔ مفروضه باشند بر نقطهٔ C



(شکل ۱۸۰)

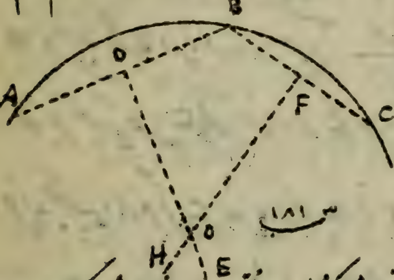
از خط غیر معین Cx زاویهٔ مساوی زاویهٔ مفروضه $\hat{C}$ رسم میکنیم و از خط غیر محدود Cy طول CB را مساوی a جدا میکنیم و از نقطه B عمود BA را بر Cx فرود میاوریم پس مثلث ABC همان مثلث مطلوب است

تبصره — برای رسم کردن عمود AB ممکنست بر قطر BC یک دایره مرور

داد تا خط مع c را در نقطه A تلاقی کند و آن وقت چون از A به B وصل کنیم زاویه CAB قائمه میشود زیرا که محاط است در نصف دایره

مسائل متعلق بدوایر و ترسیم خطوط مماس

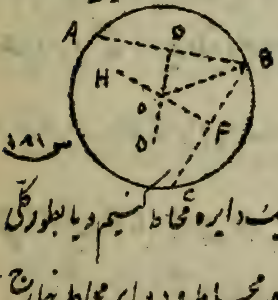
۲۵۸ - مسئله ۱۶ - میخواهیم مرکز قوس یا دایره مفروضه را معلوم کنیم



ش ۱۸۱

برقوس یا محیط دایره مفروضه سه نقطه A و B و C را نشان میکنیم و دو وتر AB و BC را وصل میکنیم و بدو عمود DE و HF هردو را نصف میکنیم پس نقطه O فصل مشترک این دو عمود مرکز مطلوب است چونکه مرکز دایره متساوی البعد است از طرفین هر وتر

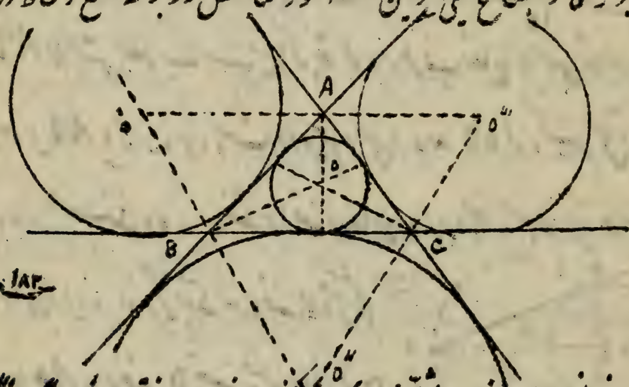
۲۵۹ - مسئله ۱۷ - میخواهیم بر سه نقطه A و B و C غیر واقعه بر یک استقامت دایره گذرانیم و یا بر مثلث ABC دایره محیط کنیم باید عمل مذکور در مسئله فوق را بعینه مجری داشت



ش ۱۸۱

۲۶۰ - مسئله ۱۸ - میخواهیم در مثلث مفروضی یک دایره محاط کنیم و یا بطور کلی دایره مماس بر سه خط مفروضی رسم کنیم (دایره محاط و دوایر محاط خارج) فرض میکنیم از تقاطع سه خط غیر مشخص AB و BC و AC مثلث ABC احداث

شده باشد س۱۸۴ و چون منصف زوایای A و B و C را رسم کنیم این سه خط
در یک نقطه O متقاطع میشوند و این نقطه بیک فاصله باشد از سه ضلع مثلث پس
اگر از این نقطه سه عمود بر سه ضلع مثلث فرود آوریم هر سه عمود متساوی میگردد و دایره
مرسوم بمرکز O و بشعاع یکی از این سه عمود مماس شود بر سه ضلع و محاط در مثلث ABC

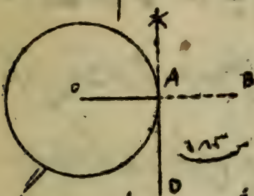


۱۸۴

وچون منصف زوایای خارجه مثلث را رسم کنیم این خطوط در نقاط O' و O'' و O'''
متقاطع میشوند و هر کدام از این نقاط بیک فاصله باشد از سه ضلع و بنا
براین دوایر مرسوم از این سه مرکز مماس شوند بر هر سه خط و این سه دایره را محاط
خارج نامند. پس از آنچه تقدم شد چنین استنباط میکنیم که چهار نقطه متساوی البعد از
اضلاع مثلث موجود است که مراکز چهار دایره مماس بر سه ضلع مثلث باشند
و برای ترسیم این دوایر ابتدا باید مراکز شان را بواسطه خطوط منصف
الزوایای داخله و خارجه بدست آورد و بعد از آن فاصله آنها را بواسطه فرود

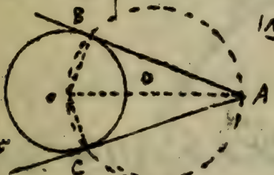
آوردن از هر مرکزی یک عمود بر یکی از اضلاع معلوم نمود

۲۶۱ – مسئله ۱۹ – از نقطه مفروضه بر محیط دایره میخواهیم خطی مماس کنیم بر آن دایره – از مرکز O وصل میکنیم بر نقطه مفروضه A (شکل ۱۸۳)



و از این نقطه خط AT را عمود میکنیم بر شعاع OA پس (شکل ۱۸۳)
AT مماس مطلوب است زیرا که خط عمود بر طرف شعاع مماس شود بر دایره و اگر OA را بطول AB باندازهٔ خود امتداد دهیم و خطی بر وسط OB عمود کنیم عمل آسانتر است

۲۶۲ – مسئله ۲۰ – از نقطهٔ واقعه در خارج دایره میخواهیم خطی مماس کنیم بر آن دایره از مرکز بنقطه مفروضه A وصل میکنیم (شکل ۱۸۴)



شکل ۱۸۴

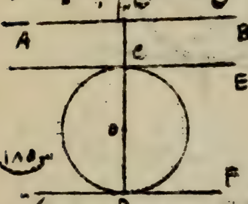
و خط AO را بر نقطه D نصف میکنیم و از مرکز D و بشعاع OD دایره رسم میکنیم تا دایرهٔ مفروضه را بر دو نقطه B و C قطع کند و خط AB و AC را وصل میکنیم که هر دو مماس مطلوبند زیرا که چون شعاع OB و OC را وصل کنیم دو زاویه OBA و OCA هرکدام محاطیست در نصف دایره قائمه باشند و بنابراین AB و AC عمود بر طرف شعاع BO و CO یعنی مماس دایره باشند

۲۶۳ – نتیجه – چون از نقطه خارجه دو خط بر دایره مماس کنیم هر دو متساوی باشند زیرا که از تساوی دو مثلث قائم الزاویه OBA و OCA که در یک

ضلع مساوی و در وتر مشترک کند پس دو ضلع AB و AC نیز مساوی میشوند

۲۶۴- نتیجه ۲- منصف زاویه حادثه مابین دو مماس مرور کند بر مرکز دایره زیرا که از تساوی دو مثلث oBA و oCA لازم میاید که دو زاویه oAB و cAo برابر باشند.

۲۶۵- مسئله ۲۱- میخواهیم خطی بموازات خط مفروضی مماس کنیم بر دایره مفروضه



شکل ۱۸۵

از مرکز o عمودی بر خط مفروض AB وارد آوریم تا دایره را بدو نقطه C و D قطع کند و بهر کدام از این دو نقطه خطی بموازات خط مفروض رسم میکنیم پس این دو خط CE و DF مماس مطلوب باشند چونکه هر دو عمودند بر طرفین قطر CD

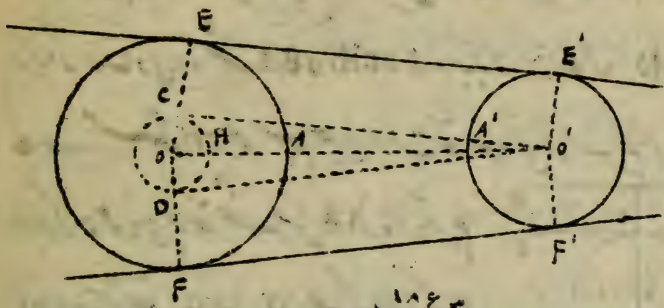
۲۶۶- مسئله ۲۲- میخواهیم بر دو دایره مفروضه خطی مماس مشترک رسم کنیم.

این مسئله شامل چهار جواب است یعنی دو مماس مشترک خارج و دو مماس مشترک داخل

اولاً میخواهیم بر دو دایره مفروضه o و o' دو مماس مشترک خارج رسم کنیم ش ۱۸۶

فرض میکنیم دو دایره مفروضه شعاع oA و o'A' باشند از شعاع oA طول AH را مساوی شعاع o'A' جدا میکنیم و بعد از مرکز دایره بزرگتر o و بشعاع oH برابر تفاضل دو شعاع یک دایره رسم میکنیم و بعد از مرکز o' دو مماس o'C و o'D براین دایره رسم میکنیم و دو شعاع oC و oD را وصل نموده تا نقطه E و F امتداد میدهیم

و از نقطه O' خط $O'E'$ عمود بر $O'C$ عمود میکنیم و همچنین $O'F'$ را عمود بر $O'D$ پس دو خط EE' و FF' مماس باشند بر دو دایره مفروضه O و O'

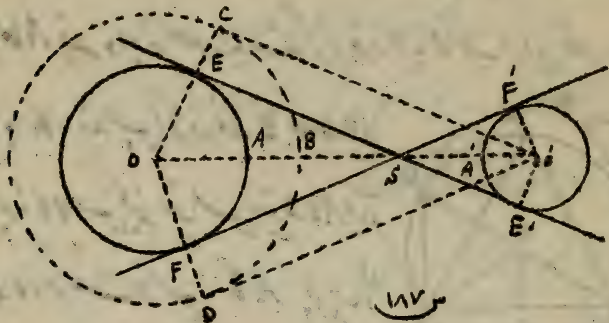


شکل ۱۸۶

برهان — دو خط CE و $O'E'$ متساوی هستند (بعمل) و هم متوازی چونکه هر دو عمودند بر یک خط $O'C$ پس شکل $CEE'O'$ متوازی الاضلاع است و چون دو زاویه C و O' قائمه اند پس دو زاویه E و E' نیز قائمه میشوند و شکل $CEE'O'$ مربع مستطیل میباشد پس خط EE' عمود بر طرف دو شعاع OE و $O'E'$ مماس میشود بر دو دایره و همینطور ثابت میکنیم که FF' مماس بر دو دایره است

ثانیاً میخواهیم بر دو دایره مفروضه O و O' دو مماس مشترک خارج رسم کنیم. از مرکز دایره بزرگتر O بشعاع OB برابر مجموع دو شعاع OA و $O'A'$ یک دایره رسم میکنیم و از مرکز O' دو خط $O'C$ و $O'D$ را بر این دایره مماس میکنیم و دو شعاع OC و OD وصل میکنیم تا دایره مفروضه بزرگتر را در دو نقطه E و F قطع کنند

واز نقطهٔ O خط O′E′ را عمود میکنیم بر CO′ و همچنین O′F′ را عمود بر DO′ پس دو خط EE′ و FF′ مماس بر دو دایره باشند



س ۱۸۷

برهان — دو خط E′O′ و EC متساوی هستند بعلاوه هم متوازیند چونکه هر دو عمودند بر یک خط CO′ پس شکل ECO′E′ مربع مستطیل است و بنابراین خط EE′ عمود بر طرفین شعاع OE و O′E′ مماس بر دو دایره میباشد

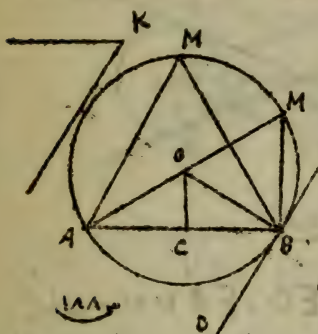
وهمینطور ثابت میکنیم که خط FF′ مماس بر دو دایره مفروضه است و باید ملتفت بود که بر دو عمل ترسیم فوق و استدلال آنها تشابه تام با یکدیگر دارند

۲۶۰ — تبصره — ما در مسئلهٔ فوق فرض کردیم که دو دایرهٔ مفروضه متخارج باشند ولی ممکن است دو دایره متقاطع یا مماس خارج یا مماس داخل باشند و در هر حالت ترسیم مماسهای مشترک هیچ اشکال ندارد

۲۶۸ — مسئله ۲۳ — میخواهیم بر خط مفروضی قطعه دایرهٔ رسم کنیم که قابل

احتوای زاویه مفروضه باشد یعنی جمیع زوایای محاطیه اش مساوی زاویه مفروضه باشند

خط AB و زاویه K مفروض است ش ۱۸۸ فرض میکنیم مسئله حل شده باشد و AMB قطعه دایره مطلوبه باشد گوئیم هر زاویه محاطیه در این قطعه باید مساوی



ش ۱۸۸

زاویه K باشد پس اگر در نقطه B خط BD را بر دایره O مماس کنیم مقیاس زاویه ABD عبارت خواهد بود از نصف قوس AB پس مساوی میشود با زاویه AMB و بعد با زاویه K و بالعکس اگر در نقطه B زاویه ABD را مساوی زاویه K رسم کنیم کافیست که بر دو نقطه A و B یک دایره بگذرانیم که در نقطه B مماس بر خط BD باشد پس از اینجا راه حل مسئله بدست آمد که در نقطه B یک زاویه مساوی زاویه K رسم کنیم و خطی بر وسط AB عمود کنیم و از نقطه B نیز عمود دیگر بر خط BD اخراج کنیم پس نقطه O محل تلاقی این دو عمود مرکز قطعه دایره مطلوبه میباشد

۲۶۹ - تبصره - هرگاه زاویه K ترقی کند نقطه O نزدیک شود بنقطه C و با زاویه $\hat{K} = 90^\circ$ این دو نقطه باهم مختلط میشوند و آنوقت قطعه دایره مطلوب عبارت باشد از نیم دایره مرسومه بقطر AB پس از اینجا معلوم میشود که وقتی زاویه مفروضه قائمه باشد قطعه دایره بشعاع ۱/۲

مطلوب دارای کوچکترین مقدار ممکنه خواهد بود

نسبت عَدَدیّه مابین دو خط

۲۷۰ -- مسئلهٔ ۲۲ - میخواهیم بزرگترین مقیاس مشترک مابین دو خط معلوم کنیم و بعد نسبت عددی آنهارا

دو خط AB و CD مفروض است س۱۸۹ بعینه مانند تعیین بزرگترین مقسوم علیه مشترک مابین دو عدد عمل و بحث میکنیم

بزرگترین مقیاس مشترک این دو خط ممکن نیست از خط اقصر CD تجاوز کند ولی ممکن



س۱۸۹

مساوی آن باشد یعنی CD بمرات صحاح در AB بگنجد درا ینصورت خود بزرگترین مقیاس مشترک مطلوبست پس خط CD را بمرات صحاحِ ممکنه بر AB نقل میکنیم و فرض میکنیم مثلاً AB شامل ۳ مرتبه CD باشد باضافه باقی KB و میگوئیم بزرگترین مقیاس مشترک مابین AB و CD همان است که مابین CD و KB موجود باشد زیراکه هر مقیاس مشترکی که مابین AB و CD موجود باشد عاد میکند AK راکه مساوی ۳CD است پس عاد میکند AB−AK یعنی KB را و بالعکس هر مقیاس مشترکی که مابین CD و KB یافت شود عاد میکند AK+KB

یعنی AB را و از انحصار جمیع مقیاسهای مشترکه مابین AB و CD بعینه همانها باشند که یافت شوند مابین CD و KB پس بزرگتر آنها نیز یکی باشد و حال KB را بر CD نقل میکنیم و فرض میکنیم که CD شامل ۲ مرتبه KB باشد باضافه باقی HD و باز بطریق مذکور ثابت میکنیم که بزرگترین مقیاس مشترک مابین CD و KB بعینه همان است که یافت شود مابین KB و HD پس HD را بر KB نقل میکنیم و فرض میکنیم HD درست ۲ مرتبه در KB بگنجد پس خط HD بزرگترین مقسوم علیه مشترک مابین AB و CD است

از آنچه مقدم شد مختصراً چنین نتیجه میشود $AB = 3CD + KB$ و $CD = 2KB + HD$

$KB = 2HD$

و از آنجا $CD = 4HD + HD = 5HD$ و $AB = 15HD + 2HD = 17HD$

پس نسبت عددی CD به AB مساویست با $\frac{5}{17}$ و نسبت AB به CD مساویست با $\frac{17}{5}$ و چنین نوشته میشود $\frac{CD}{AB} = \frac{5}{17}$ و $\frac{AB}{CD} = \frac{17}{5}$

۲۷۱ - تبصره ۱ - در آخر عمل چنین فرض کردیم که سلسله اعمال منتهی شود با باقیمانده که برات صحاح در باقیمانده ما قبل بگنجد ولیکن اغلب اتفاق افتد که دو خط مفروض نسبت بهم اصم باشند و مقیاس مشترک نداشته باشند در این حالت هیچوقت بباقیمانده صفر نمیرسیم ولی هر قدر سلسله اعمال را بی‌نهایت امتداد دهیم باقیمانده های متوالیه آنقدر

کوچکتر شوند که بخواهیم بنابراین میتوان از یکی از باقیمانده ها صرف نظر نمود و باقیمانده قبل از مقیاس پس مشترک تقریبی مطلوب قرار داد و آنوقت نسبت دو خط بمقدار تقریبی بدست میآید

۲۷۲ - تبصره . - همین عمل را در تعیین بزرگترین مقیاس مشترک و تقدیر نسبت مابین هر دو کمیت هندسی بعینه باید مجری داشت

امثله متعلقه بمقاله دوم

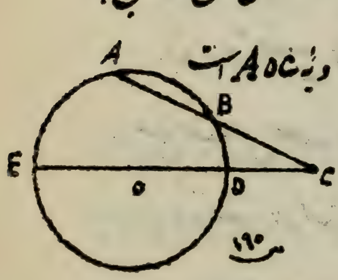
(قضایای مبرهن نمودنی و مسائل حل کردنی)

۱ - چون از نقطه تماس دو دایره متماس دو قاطع رسم کنیم دو وتر دو قوس متوازی هستند

۲ - چون از جمیع نقاط محیط دایره خطوط متوازیه و متساویه و ممتد در یکجهت رسم کنیم معلوم کنید مکان هندسی اطراف این خطوط را

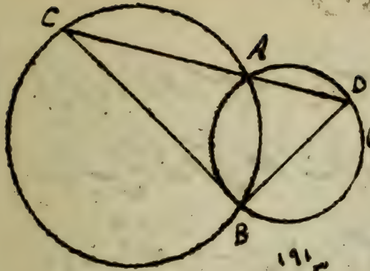
۳ - از نقطه واقعه در درون دایره اصغر وتری که ممکن است بگذرانید

۴ - چون در دایره O شکل ۱۹۰ وتر AB را بطول BC مساوی شعاع از خارج امتداد دهیم ثابت کنید که زاویه ADE سه برابر زاویه AOC است



ش ۱۹۰

۵ - هرگاه دو دایره در دو نقطه A و B متقاطع باشند و از نقطه A قاطعی رسم کنیم تا دو دایره را در C و D قطع کند ثابت کنید که زاویه CBD همواره بریک قرار است و همچنین زاویه حادثه مابین



س ۱۹۱

دو خط مماس بر C و D نیز ثابت است س ۱۹۱

۶- از تقاطع منصف الزوایای هر ذو اربعة الاضلاع محدبی یک ذو اربعة الاضلاع قابل احتوا در دایره تشکیل میگردد

۷- هرگاه دو وتر متساویه متقاطع باشند قطعات مفروزه آنها مرتبا متساوی میباشند

۸- ارتفاعات هر مثلث عبارتند از منصف الزوایای مثلثی که رؤس مواقع آن ارتفاعات باشند

۹- مواقع ارتفاع هر مثلث و اوساط اضلاع آن و اوساط خطوط واصله از محل تلاقی ارتفاعات بر رؤس مثلث مجموعاً نه نقطه هستند بر محیط دایره (دایرهٔ نه نقطه)

۱۰- در ذو اربعة الاضلاع محیطیه (یعنی چهار ضلعش مماس دایره باشند) مجموع هر دو ضلع مقابل مساویست با مجموع دو ضلع دیگر و بالعکس

۱۱- بر دایرهٔ مفروضه خطی مماس کنید که با خط مفروضی زاویه مفروضه احداث کند

۱۲- ذو اربعة اضلاعی رسم کنید که طول چهار ضلع آن و طول خط واصل مابین منتصف دو ضلع مقابل معلوم باشد

۱۳- ذو ذنقه رسم کنید که طول هر چهار ضلعش معلوم باشند

۱۴- دایرهٔ بشعاع مفروض و مماس با دو دایره مفروضه رسم کنید

مقالهٔ سوم

اشکال متشابهه

۱ ـ خطوط متناسبه

۲۷۳ ـ **تعریف** ـ دو طول a و b را گوئیم متناسبند با دو طول دیگر a' و b' وقتیکه نسبت دو طول اول مساوی باشد با نسبت دو طول دیگر یعنی $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$ و یا $\frac{b}{b'}=\frac{a}{a'}$. و این تساوی را تناسب گوئیم

کلیةً چند طول a و b و c و ... را گوئیم متناسبند با چند طول دیگر a' و b' و c' و ... درصورتیکه رشتهٔ نسب ذیل متساوی باشند $\ldots=\frac{c}{c'}=\frac{b}{b'}=\frac{a}{a'}$

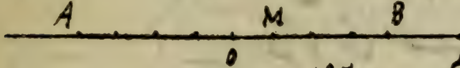
طول a را واسطه در نسبت یا واسطه هندسی مابین دو طول b و c گوئیم درصورتیکه چنین داشته باشیم $\frac{c}{a}=\frac{a}{b}$ و در این حالت b جزو سوم تناسب a و c است

و اگر a و b و c نمایش اعداد باشند از تناسب فوق چنین نتیجه میشود

قضیهٔ ۱

۲۷۴ ـ بر خط غیر محدودی که از دو نقطه A و B گذشته باشد همواره میتوان دو نقطه یافت چنانچه نسبت فاصله های هر کدام از آنها از دو نقطه A و B مساوی نسبت مفروضی باشد و یکی از این دو نقطه واقع باشد مابین A و B و دیگری در خارج آنها

اولاً میخواهیم اثبات کنیم که مابین A و B همواره میتوان فقط یک نقطه یافت چنانچه نسبت فاصله های آن از A و B مثلاً مساوی نسبت $\frac{5}{3}$ باشد خط AB را بر $3+5$ یعنی بر ۸ جزء متساویه قسمت میکنیم



شکل ۱۹۲

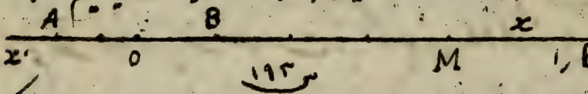
و ابتدا از A بطول AM را مساوی ۵ از این اجزای متساویه جدا میکنیم و گوئیم نقطهٔ M همان نقطه مطلوبه است زیرا که چون AM شامل ۵ جزء و MB سه جزء از آن اجزاء است پس $\frac{MA}{MB}=\frac{5}{3}$ و علاوه بر این هیچ نقطهٔ دیگری از AB نتواند دارای چنین خاصیت باشد زیرا اگر فرض کنیم نقطهٔ M به B نزدیک شود صورت AM میفزاید و مخرج MB تنزل مینماید پس نسبت $\frac{MA}{MB}$ بزرگ میشود و اگر بالعکس نقطهٔ M به A نزدیک شود صورت MA تنزل میکند و مخرج MB میفزاید پس نسبت $\frac{MA}{MB}$ کوچک میشود پس از روی این دو دلیل معلوم میشود که نقطهٔ M فقط در موضع اولیه خط AB را بر نسبت $\frac{5}{3}$ قسمت میکند

ثانیاً میخواهیم اثبات کنیم که در خارج دو نقطهٔ A و B نیز میتوان فقط یک نقطهٔ M یافت که نسبت $\frac{MA}{MB}$ مساوی نسبت مفروضی باشد و در اینجا دو حالت منظور داریم بنا بر آنکه نسبت مفروضه بزرگتر یا کوچکتر از واحد باشد

اولاً فرض میکنیم نسبت مفروضه بزرگتر از واحد و مثلاً مساوی $\frac{5}{3}$ باشد و در این

حالت چون نقطه مطلوبه ابعد است از A تا از B پس این نقطه در بین AB میتواند موجود

باشد لهذا خط AB را س ۱۹۳ بر ۳ - ۵ یعنی بر ۲ جزء متساویه قسمت میکنیم و ابتدا



از B طول BM را

مساوی ۳ جزء از اجزای متساویه جدا میکنیم و گوئیم نقطه M همان نقطه مطلوبه است زیرا که

چون AM شامل ۵ جزء و MB سه جزء از اجزای متساویه است پس $\frac{5}{3} = \frac{MA}{MB}$

و علاوه براین هیچ نقطه دیگری در بین AB نتواند دارای چنین خاصیت باشد زیرا که

اگر فرض کنیم نقطه M به B نزدیک شود صورت و مخرج $\frac{MA}{MB}$ هر دو بیک مقدار

تنزل کنند و چون این نسبت بزرگتر از واحد است باز بزرگتر از مقدار اولیه اش

میشود و اگر بالعکس نقطه M از B دور شود دو جمله نسبت $\frac{MA}{MB}$ بیک مقدار

میافزایند و این نسبت کوچک میشود پس از روی این دو دلیل معلوم می شود

که فقط همان نقطه اولیه M میتواند در فرض $\frac{MA}{MB} = \frac{5}{3}$ صدق کند

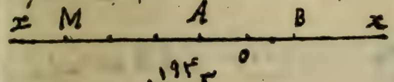
ثانیاً فرض میکنیم که نسبت کوچکتر از واحد مثلاً مساوی $\frac{3}{5}$ باشد بدیهی است

که در این حالت نقطه مطلوبه M چون به A اقرب است تا به B نتواند در یمین

B یعنی در قطعه Bx باشد چونکه آنوقت لازم می آید که در نسبت مفروضه صورت بزرگتر

از مخرج باشد و این خلاف فرض است پس باید در یسار A یعنی در قطعه Ax' موجود

باشد لهذا خط AB را بر ۳ ـ ۵ یا ۸ جزء متساوی قسمت میکنیم ص ۱۹۴ و بعد یکی از آن
اجزاء را سه مرتبه در یسار نقطه A نقل میکنیم



و گوییم نقطه M همان نقطهٔ مطلوبست زیرا که چون AM شامل ۳ جزء و MB
پنج جزء از اجزای متساویه است پس $\frac{MA}{MB}=\frac{3}{5}$ و اگر علاوه براین فرض کنیم
که نقطهٔ M بر A نزدیک شود دو جمله نسبت $\frac{MA}{MB}$ بیک مقدار تنزل کنند
و چون این نسبت کوچکتر از واحد است باز کوچکتر از مقدار اولیه اش میشود و اگر بالعکس
نقطهٔ M از A دور شود دو جمله این نسبت بیک مقدار بیفزایند و این نسبت
بزرگ میشود پس از روی این دو دلیل معلوم میشود که فقط همان نقطهٔ اولیه اش
میتواند در فرض $\frac{MA}{MB}=\frac{5}{3}$ صدق کند

۲۷۵ - تبصرهٔ ۱ - پس از آنچه مقدم شد بطور کلی چنین نتیجه میشود که از برای نقطه
M همواره دو موضع میتوان یافت چنانچه نسبت $\frac{MA}{MB}$ مساوی هر نسبتی باشد
که بخواهیم یعنی اگر نسبت معروضه کوچکتر از واحد باشد هر دو موضع M در یک سمت
نقطهٔ O وسط AB واقع باشند یکی مابین O و A و دیگری در قطعهٔ x'A و اگر نسبت
معروضه بزرگتر از واحد باشد باز هر دو موضع M در یکطرف نقطهٔ O واقع باشند یکی مابین
O و B و دیگری در قطعهٔ Bx و بالاخره اگر نسبت معروضه مساوی واحد باشد

یکی از دو موضع M واقع باشد بر نقطه O و دیگری در فاصله بینهایت دور افتد.

۲۷۶ - تبصره ۲ - بواسطه استعمال خطوط جبریه میتوان موضع نقطه M از خطی را نسبت بنقطه دیگر A از همان خط بدون ابهام معلوم نمود باین طریق که بر خط معروض جهتی جهت مثبتی انتخاب کنیم (عموماً از چپ براست) و جهت مخالف آنرا جهت منفی نامیم و آنوقت مقدار عددی فاصله AM را که مسبوق بعلامت + یا − باشد بحسب آنکه جهت سیر از A به B در جهت مثبت یا منفی باشد باین رمز بنمائیم $\overline{AM}$ و آنرا قطعه خط جبری گوئیم و بنابراین در حالت اول $\overline{AM}=+AM$ و در حالت ثانی $\overline{AM}=-AM$

پس از این مقدمه چون در قضیه مذکوره بجای نسبت عددیه $\frac{MA}{MB}$ نسبت دو قطعه خط MA و MB یعنی $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ را منظور آوریم می بینیم که اگر نسبت مثبت باشد نقطه M واقع میشود در خارج AB و اگر منفی باشد نقطه M واقع شود مابین A و B و اگر این نسبت مساوی ۱+ باشد نقطه M در فاصله بینهایت دور افتد و بالاخره اگر این نسبت مساوی ۱− باشد نقطه M واقع گردد بر نقطه O وسط AB

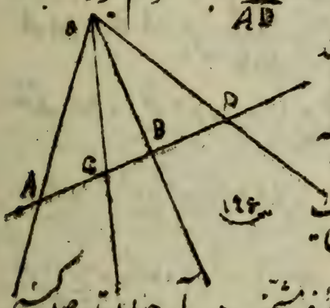
۲۷۷ - **تقسیم توافقی** - هرگاه بر خط غیر محدودی دو نقطه C و D معلوم کنیم چنانچه نسبت فاصله های آنها از دو نقطه A و B مساوی باشند یعنی $\frac{CA}{CB}=\frac{DA}{DB}$ در اینصورت گوئیم که C و D قطعه خط AB را بتوافق قسمت کنند یا آنکه C و D



ش ۱۹۵

نسبت بدو نقطه A و B مزدوج توافقی باشند و بالعکس دو نقطه A و B نیز قطعه خط CD را بتوافق قسمت کنند یا آنکه A و B نیز نسبت به C و D مزدوج توافقی باشند زیرا که در تناسب فوق چون ترتیب دو جمله وسطین را تغییر دهیم چنین میشود $\frac{BC}{BD}=\frac{CA}{DA}$

و باید دانست که هرگاه بجای دو نسبت متساویه $\frac{CA}{CB}$ و $\frac{DA}{DB}$ نسبت قطعات خطوط جبریه یعنی $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$ و $\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$ را ملحوظ داریم این دو نسبت بحسب مقدار مطلق متساوی ولی مختلف العلامه باشند یعنی $\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = -\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$ و این رابطه را رابطه توافقی گوییم و چون آنرا باین صورت بنویسیم $\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = -\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$ باز معلوم میشود که بالعکس نقطه A و B نیز نسبت به C و D مزدوج توافقی باشند



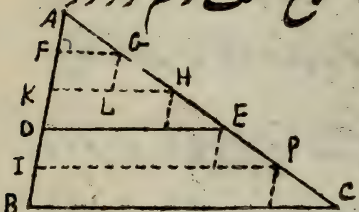
ش ۱۹۶

۲۷۸ - **دستگاه توافقی** - هرگاه چهار نقطه A و B و C و D در روی خط غیر محدودی یک تقسیم توافقی تشکیل دهند ش ۱۹۶ و چون از نقطه غیر مشخص O بر آن چهار نقطه وصل کنیم چهار خط OA و OB و OC و OD را دستگاه توافقی گوییم و دو خط OA و OB را نسبت بدو خط OC و OD و بالعکس اشعه مزدوجه نامیم و خواص این دستگاه را در ضمیمه مقاله سوم خواهیم دید و مخصوصا ثابت میکنیم که هر خط قاطع غیر مشخصی که

برأس O نگذرد این چهار شعاع را در چهار نقطهٔ تقسیم توافقی قطع نماید

قضیهٔ ۲ — (منسوب به طالس یونانی)

۲۷۱ — هر خطی که بموازات یکی از اضلاع مثلث رسم شود دو ضلع دیگرش را بیک نسبت قطع کند



س ۱۹۷

در مثلث ABC (س ۱۹۷) خط DE را موازی ضلع BC رسم میکنیم باید ثابت کرد که $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$

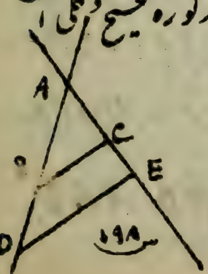
برهان — فرض میکنیم AD و BD مقیاس مشترکی (AF) داشته باشند و آن ۳ مرتبه در AD بگنجد و ۲ مرتبه در BD و این تناسب نتیجه میشود $\frac{AD}{DB}=\frac{3}{2}$ و بعد از نقاط تقسیم F و K و I خطوطی بموازات BC رسم میکنیم و گوئیم این خطوط متوازیه ضلع AC را نیز به ۵ جزء متساویه قسمت میکنند محض اثبات این مدعا از نقاط G و H و E و P خطوطی بموازات AB رسم میکنیم پس ۵ مثلث تشکیل میشوند که تماماً مساوی باشند چونکه در یک ضلع و دو زاویهٔ طرفین متساویند مثلاً در دو مثلث AFG و HLG گوئیم چون GL = FK اضلاع متقابل متوازی الاضلاع هستند و AF = FK بنا بفرض پس دو ضلع GL و AF متساوی میباشند و دو زاویهٔ FAG و HGL متساوی هستند چونکه متقابله‌اند نسبت بدو متوازی AF

و ما‌ها و قاطع AC و همچنین دو زاویهٔ F و ما نیز متساوی میباشند چونکه اضلاعشان
متوازی و ممتد در یک جهة اند پس از تساوی این دو مثلث دو ضلع ما AG و GH ما
متساوی میگردند و بهمین طریق ثابت میکنیم که $AG = HE = EP = PC$
پس خط AC به ۵ جزء متساویهٔ قسمت شده که ۳ جزء از آن اجزاء در AE گنجیده
و ۲ جزء در EC پس این تناسب نتیجه میشود $\frac{AE}{EC}=\frac{3}{2}$ و چون دو نسبت
$\frac{AD}{DB}$ و $\frac{AE}{EC}$ هر دو دارای یک مقدار $\frac{3}{2}$ شدند پس متساوی میگردند
و این تناسب نتیجه میشود

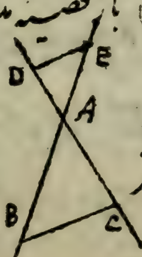
$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$

واگر دو خط AD و DB اصم باشند و مقیاس مشترک نداشته باشند باز قضیهٔ
مذکوره صحیح و کلی است زیرا که همواره میتوان خطی آنقدر کوچک که بخواهیم اختیار
نمود تا بعده مرآتی بدون خطای محسوسی در هر کدام از آن دو خط بگنجد و بطریق
(نمرهٔ ۲۲۶) ثابت میکنیم که همواره آن دو خط بر نسبت AE و CE است

۲۸۰ - تبصره - هرگاه خط DE موازی BC عوض قطع خود دو ضلع مثلث
امتداد آنها را قطع کند (شکل ۱۹۸ و شکل ۱۹۹) باز قضیهٔ مذکوره صحیح و کلی است
و بهمان طریق فوق مبرهن میشود



شکل ۱۹۸



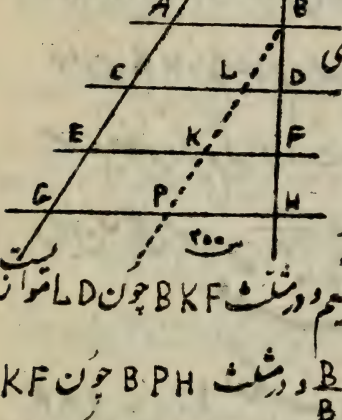
شکل ۱۹۹

۲۸۱ - نتیجه - دو ضلع AB و AC نیز

خطوط متناسبه

بر نسبت قطعات خود باشند و میتوان چنین نوشت $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$ و $\frac{AB}{DB}=\frac{AC}{EC}$
چونکه از روی شکل ۱۹۷ ظاهر است که دو نسبت اول مساویست با $\frac{5}{3}$ و دو نسبت ثانی مساوی
با $\frac{8}{3}$ و این دو تناسب را بواسطه ترکیب تناسب $\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DB}$ نیز میتوان حاصل
نموده و علاوه براین هر کدام از آنها از روی خواص تناسبات که در حساب
به هشت صورت مختلف نوشته میشود مثلاً اگر ترتیب دو جمله وسطین آنها را تغییر دهیم چنین میشود
$\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AE}$ و $\frac{AB}{AC}=\frac{DB}{EC}$ و نظر باشتراک نسبت $\frac{AB}{AC}$ این رشته
تناسب نتیجه میشود $\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AE}=\frac{DB}{EC}$

۲۸۲ - **نتیجه** - در دو خط غیر مشخص قطعات مفروزه بخطوط متوازیه متناسب میباشند



فرض میکنیم دو خط AG و BH را چهار خط متوازی AB و CD و EF و GH قطع کرده باشند
باید ثابت کرد که $\frac{AC}{BD}=\frac{CE}{DF}=\frac{EG}{FH}$
از نقطه B خط PB را بموازات AG رسم میکنیم و در مثلث BKF چون LD موازیست
با PH این تناسب نتیجه میشود $\frac{BL}{BD}=\frac{LK}{DF}=\frac{BK}{BF}$ و در مثلث BPH چون KF
موازیست با PH این تناسب حاصل میشود $\frac{BK}{BF}=\frac{KP}{FH}$ پس نظر باشتراک $\frac{BK}{BF}$
این رشته تناسب نتیجه میشود $\frac{BL}{BD}=\frac{LK}{DF}=\frac{KP}{FH}$ و چون $AC=BL$ و $LK=CE$

و $KP = EG$ زیرا که اضلاع متقابله متوازی الاضلاعها میباشند پس رشته تناسب

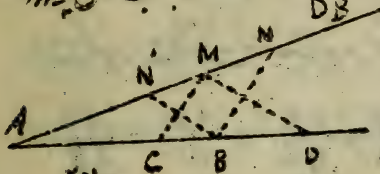
فوق چنین میشود $\frac{AC}{BD} = \frac{CE}{DF} = \frac{EG}{FH}$

۲۸۳ - مسئله - بر خطی که از دو نقطه A و B گذشته باشد میخواهیم دو نقطه C

و D معلوم کنیم چنانچه دو نسبت $\frac{CA}{CB}$ و $\frac{DA}{DB}$ مساوی شوند با نسبت دو طول معین m و n

این مسئله از روی قضیه مذکوره حل میشود بطریق

که از نقطه A خط غیر مشخصی رسم میکنیم و از این خط



شکل ۲۵۱

ابتدا از A طول AM را مساوی m جدا میکنیم و بعد از طرفین M نیز دو طول

MN و MN' را مساوی n جدا میکنیم و همچنین از N به B وصل میکنیم و MC را

موازی NB رسم مینمائیم و همچنین از N' به B وصل میکنیم و MD را موازی N'B

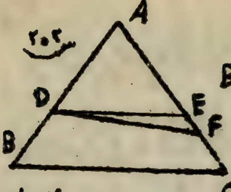
رسم مینمائیم و گوئیم که C و D دو نقطه مطلوبه باشند زیرا که بموجب قضیه سابقه

چنین حاصل میشود $\frac{CA}{CB}=\frac{MA}{MN}=\frac{m}{n}$ و $\frac{DA}{DB}=\frac{MA}{MN}=\frac{m}{n}$

قضیه ۳ (عکس قضیه ۲)

۲۸۴ - بالعکس هر خط که دو ضلع مثلث را بر یک نسبت قطع کند موازی باشد با ضلع سوم

فرض میکنیم در مثلث ABC خط DE دو ضلع AB و AC را بر یک نسبت قطع کرده باشد



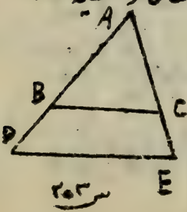
شکل ۲۰۲

یعنی $\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DB}$ گوئیم که این خط DE موازیست با BC

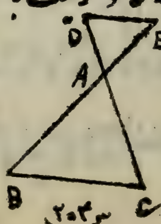
برهان - اگر گویند DE موازی نیست با BC فرض میکنیم خط دیگری مثلاً DF موازی آن باشد و آنوقت بحکم قضیهٔ سابقه این تناسب نتیجه میشود $\frac{AF}{FC}=\frac{AD}{DB}$ و چون این تناسب را با تناسب فوق مقایسه کنیم چنین حاصل میشود $\frac{AF}{FC}=\frac{AE}{EC}$ و این تناسب صحیح نیست چونکه در نسبت ثانی صورت بزرگتر است از صورت نسبت اول و مخرجش کوچکتر است پس خطی که از نقطه D بموازات BC رسم شود منطبق خواهد شد بر DE یعنی خود خط DE موازیست با BC

دلیل دیگر - هرگاه DE موازی BC نباشد خطی دیگر که از نقطه D بموازات BC رسم شود باید ضلع AC را هم بدو قطعه متناسب با $\frac{AD}{DB}$ قسمت کند ولی بموجب قضیهٔ (نمره ۲۷۴) یک خط نتواند در دو نقطه مختلف بر یک نسبت منقسم شود پس خطی که از نقطه D موازی با BC رسم شود باید مانند DE مرور کند بر نقطه E یعنی منطبق گردد بر DE پس خود خط DE موازیست با BC

۲۸۵ - تبصره - هرگاه نقطه D و E هر دو واقع شوند بر امتداد اضلاع AB و AC مشروط بر آنکه همواره در یک سمت نقطه A هستند باز DE موازیست با BC و قضیهٔ مذکوره صحیح



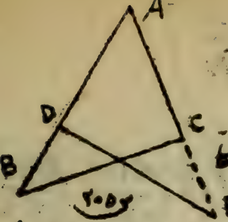
شکل ۲۰۳



شکل ۲۰۴

و بهمان طریق حالت اول مبرهن میشود

و اما اگر نقطهٔ D بر خود ضلع واقع شود و نقطهٔ E

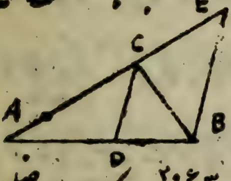


برامتداد ضلع AC واقع در س ۲۰۵ در این صورت بدیهی است که خط DE موازی با BC نخواهد شد اگر تناسب $\frac{DA}{DB}=\frac{EA}{EC}$ صحیح و محقق باشد

۲ـ خواص منصف الزوایای مثلث

قضیه ۴

۲۸۶ـ در هر مثلث اولاً خط منصف زاویه داخله قطع کند ضلع مقابل را بدو قطعه متناسب با دو ضلع دیگر ثانیاً خط منصف زاویه خارجه تحدید کند در امتداد ضلع مقابل دو قطعه به نسبت دو ضلع دیگر



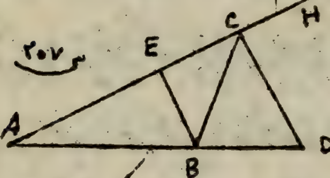
اولاً فرض میکنیم در مثلث ABC س ۲۰۶ خط CD منصف زاویه داخله C باشد باید ثابت کرد که $\frac{DA}{DB}=\frac{CA}{CB}$

برهان ـ از نقطه B خط BE را بموازات منصف الزاویه CD رسم میکنیم تا امتداد ضلع AC را در نقطه E تلاقی کند و چون در مثلث AEB خط CD موازیست با ضلع BE پس دو ضلع دیگر AB و AE را به یک نسبت قطع کند و این تناسب نتیجه میشود $\frac{AD}{DB}=\frac{AC}{CE}$ پس کافی است که ثابت کنیم CB = CE یعنی مثلث ECB متساوی الساقین است بنابراین گوئیم دو زاویه ACD و CEB متساوی میباشند چونکه متقابله اند نسبت به دو موازی CD و EB و قاطع AE و همچنین دو زاویه DCB و CBE نیز متساوی میباشند چونکه

متبادله داخله اند نسبت بهمان دو متوازی و قاطع BC و چون بنابفرض دو زاویهٔ ACD و DCB متساوی هستند پس دو زاویهٔ CEB و CBE که مرتباً مساوی‌اند با آن دو زاویه متساویه متساوی باشند بنابراین مثلث CBE متساوی الساقین است و $BC = CE$

حال چون در تناسب سابق BC را بجای EC قرار دهیم چنین میشود $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}$

س ۲۰۷



ثانیاً فرض میکنیم در مثلث ABC س ۲۰۷ CD' خط منصف زاویهٔ خارجه BCH باشد باید ثابت کرد که $\frac{D'A}{D'B} = \frac{CA}{CB}$ دلیل بعینه مانند حالت مذکوره است

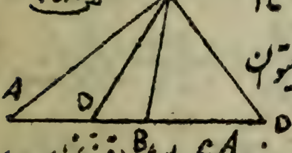
از رأس B خط BE را بموازات منصف الزاویه CD' رسم میکنیم تا ضلع AC را در نقطه E تلاقی کند و در مثلث ACD' چون خط BE موازیست با ضلع CD' پس دو ضلع دیگر را بر یک نسبت قطع میکند یعنی $\frac{D'A}{D'B} = \frac{CA}{CE}$ پس کافیست که ثابت کنیم $CE = CB$

بنابراین گوئیم زاویهٔ BEC و D'CH متساوی میباشند چونکه متقابله اند نسبت بدو متوازی BE و CD' و قاطع AC و همچنین دو زاویهٔ CBE و BCD' نیز متساوی میباشند چونکه متبادله داخله اند نسبت بهمان دو متوازی و قاطع BC ولی چون بنابفرض دو زاویهٔ BCD' و D'CH متساوی هستند پس دو زاویهٔ CEB و CBE نیز متساوی میگردند بنابراین مثلث CBE متساوی الساقین است و $BC = CE$

حال چون در تناسب سابق BC را بجای CE قرار دهیم چنین میشود $\frac{D'A}{D'B} = \frac{CA}{CB}$

در حالت مخصوص وقتی که در مثلث ABC دو ضلع AC و BC متساوی باشند خط منصف زاویهٔ داخلهٔ ACB مرور میکند بر وسط AB و بر آن عمود میشود و خط منصف زاویهٔ خارجه BCH موازی شود با AB پس نقطه D واقع شود بر وسط AB و نقطهٔ D' بفاصله بینهایت دور واقع شود و بالعکس.

۲۸۷ - و بالعکس - اگر در مثلث ABC یک نقطه D بر ضلع AB و نقطه دیگر D' بر امتداد آن ضلع چنان اختیار کنیم که $\frac{DA}{DB}=\frac{D'A}{D'B}=\frac{CA}{CB}$ گوئیم خط CD عبارتست از خط منصف زاویهٔ داخله C و همچنین خط CD' منصف زاویهٔ خارجه است در C



شکل ۲۰۸

برهان - گوئیم مابین دو نقطه A و B یک نقطه فقط میتوان یافت که نسبت فواصلش از A و B مساوی نسبت معروضه $\frac{CA}{CB}$ باشد (قضیهٔ نمره ۲۷۴) و چون بموجب قضیهٔ سابقه موقع منصف زاویهٔ داخلهٔ ACB نیز دارای همین خاصیت است پس خط CD همان منصف الزاویه خواهد بود و همچنین گوئیم در امتداد AB یک نقطه D' فقط میتوان یافت چنانچه $\frac{D'A}{D'B}=\frac{CA}{CB}$ و چون موقع خط منصف زاویهٔ خارجهٔ C نیز شامل همین خاصیت است پس خط CD' همان منصف الزاویه خواهد بود

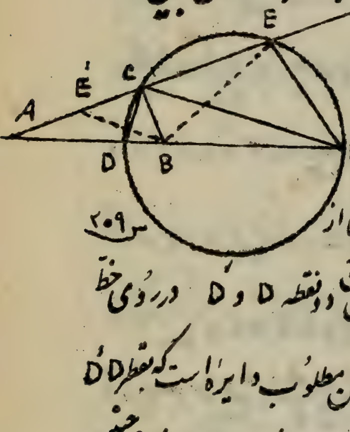
۲۸۸ - تبصره - چون اضلاع مثلث ABC را به a و b و c نمائیم میتوان طول قطعات DA و DB و D'A و D'B را که از تقاطع ضلع AB با منصف الزوایای CD و CD' معروض شده بحسب اضلاع حساب نمود پس روابط ذیل را مینویسیم

$$\frac{D'A}{b} = \frac{D'B}{a} = \frac{D'A - D'B}{b-a} = \frac{c}{b-a} \quad و \quad \frac{DA}{b} = \frac{DB}{a} = \frac{DA+DB}{a+b} = \frac{c}{a+b}$$

واز انجا $DA = \frac{bc}{a+b}$ و $DB = \frac{ac}{a+b}$ و $D'A = \frac{bc}{b-a}$ و $D'B = \frac{ac}{b-a}$

قضیهٔ ۵

۲۸۹ - مکان هندسی نقاطی که فواصلشان از دو نقطهٔ ثابته بر نسبت مفروض ثابتی باشند دایره‌ایست که مرکزش واقع باشد بر خط وصل مابین آن دو نقطه



ش ۲۰۹

فرض میکنیم A و B دو نقطهٔ ثابته و λ نسبت مفروضه باشد اولاً میدانیم که بر خط AB دو نقطه موجود است (نمرهٔ ۲۷۴) یکی D در خود AB و دیگری D' در امتداد آن چنانچه فاصله‌های آنها از A و B بر نسبت مفروضه λ باشد یعنی $\frac{DA}{DB}=\lambda$ و $\frac{D'A}{D'B}=\lambda$ پس آن دو نقطه D و D' در روی خط AB متعلق باشند بمکان مطلوب در حال ثابت میکنیم که مکان مطلوب دایره‌ایست که قطرش DD' باشد و فرض میکنیم C نقطهٔ غیر مشخص دیگری از مکان مطلوب باشد در خارج AB پس بنا بفرض چنین خواهیم داشت $\lambda = \frac{CA}{CB}$ و چون این تساوی را با دو تساوی سابق مقایسه نمائیم این دو تناسب حاصل میشود $\frac{DA}{DB}=\frac{CA}{CB}$ و $\frac{D'A}{D'B}=\frac{CA}{CB}$ و چون دو خط CD و CD' را وصل کنیم از تناسب اول معلوم میشود (نمرهٔ ۲۸۷) که CD منصف زاویهٔ ACB است واز تناسب دوم نیز معلوم میشود که CD' منصف زاویهٔ خارجه BCE است

ولی چون این دو خط منصف دو زاویه مکمل هستند پس عمودند بر یکدیگر پس زاویه DCD' قائمه است بنابراین نقطه C واقع است در روی دایره که بقطر DD' باشد.

۲۹۰ - و بالعکس هر نقطه C از دایره مرسومه بقطر DD' متعلق است بمکان مطلوب.

برهان - از نقطه B دو خط BE و BE' را مرتبا بموازات CD و CD' رسم میکنیم تا خط AC را در E و E' تلاقی کنند و نظر بتوازی این خطوط دو تناسب ذیل نتیجه میشوند $\frac{DA}{DB}=\frac{CA}{CE}$ و $\frac{D'A}{D'B}=\frac{CA}{CE'}$ و چون بنا بفرض دو نسبت $\frac{DA}{DB}$ و $\frac{D'A}{D'B}$ متساوی هستند پس $\frac{CA}{CE}=\frac{CA}{CE'}$ و از آنجا $CE=CE'$ ولی چون اضلاع زاویه EBE' مرتبا متوازیند با اضلاع زاویه قائمه DCD' پس زاویه EBE' نیز قائمه است و رأسش B واقع باشد بر محیط دایره مرسومه بقطر EE' پس $CE=CE'=CB$ و بنا براین در تناسب $\frac{DA}{DB}=\frac{CA}{CE}$ چون CB را بجای CE قرار دهیم چنین میشود $\frac{DA}{DB}=\frac{CA}{CB}$ پس معلوم شد که نقطه C متعلق است بمکان مطلوب.

۲۹۱ - تبصره - هرگاه نسبت مفروضه m مساوی واحد باشد نقطه D وسط AB میشود و نقطه D' بفاصله بینهایت دور افتد و آنوقت دایره مرسومه بقطر DD' مبدل شود بعمودی وارد بر وسط AB.

۲۹۲ - نتیجه - نسبت فاصله های هر نقطه از محیط دایره از دو نقطه که نسبت بقطر دایره مزدوج توافقی باشند مقداریست ثابت وقتیکه این نقطه محیط دایره را سیر کند

۲- مثلثات متشابهه

۲۹۲- تعریف - مثلثات متشابهه عبارتند از مثلثاتیکه زوایاشان نظیر بنظیر مساوی باشند و اضلاع متناظره شان متناسب و مقصود از اضلاع متناظره آنهاست که مقابل باشند بزوایای متساویه مثلاً دو مثلث ABC و A'B'C' را متشابه گوئیم در صورتیکه پنج رابطه ذیل محقق باشند $\hat{A}=\hat{A'}$، $\hat{B}=\hat{B'}$ و $\hat{C}=\hat{C'}$ و $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}$

در دو مثلث متشابه نسبت هر دو ضلع متناظره را نسبت تشابه آن دو مثلث گوئیم

ایجاد مثلثی شبیه بمثلث مفروضی از قضیه ذیل نتیجه میشود

قضیهٔ ۶

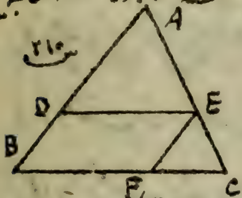
۲۹۴- هر خط که بموازات یکی از اضلاع مثلث رسم شود مثلثی جدید احداث کند شبیه بمثلث اول

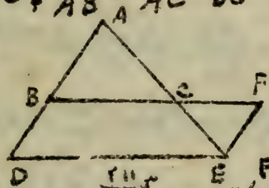
فرض میکنیم در مثلث ABC خط DE موازی ضلع BC باشد باید ثابت کرد که مثلث ADE شبیه است بمثلث اول یعنی این دو مثلث متساوی الزوایا و متناسب الاضلاع باشند

برهان - اولاً زوایای این دو مثلث نظیر بنظیر متساوی هستند زیرا که زاویهٔ A مشترکست و دو زاویهٔ D و B متساویند چونکه متقابله اند و همینطور زاویهٔ E مساویست بزاویهٔ C بهمان دلیل ثانیاً اضلاع متناظره متناسب باشند زیرا که از توازی DE و BC چنین نتیجه

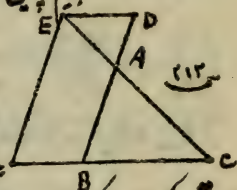
میشود $\frac{AE}{AC}=\frac{AD}{AB}$ و چون EF را موازات ضلع AB رسم کنیم باز چنین میشود $\frac{BF}{BC}=\frac{AE}{AC}$ پس این سه نسبت متساویه حاصل میگردد $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{BF}{BC}$ و چون در متوازی الاضلاع BDEF دو ضلع متقابل DE و BF متساوی هستند در تساوی فوق بجای BF مساویش DE را قرار دهیم چنین میشود $\frac{DE}{BC}=\frac{AE}{AC}=\frac{AD}{AB}$ پس دو مثلث ABC و ADE متشابه میباشند.

شکل ۲۱۰





شکل ۲۱۱



شکل ۲۱۲

تبصره - حکم قضیه فوق کلی است و بهمان طریق مبرهن میشود وقتیکه خط موازی DE امتداد دو ضلع مثلث ABC را در بالای راس A (شکل ۲۱۲) یا در زیر ضلع BC (شکل ۲۱۱) قطع کند و فقط در آنحالت که DE امتداد AB و AC را در بالای راس A قطع کند زوایای متساویه در A متقابله براس باشند و دو زاویه متساویه B و D و همچنین E و C بترتیب متبادله داخله اند.

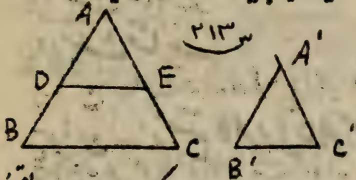
۲۹۵ - **حالات تشابه دو مثلث** - سه حالت اصلیه برای تشابه دو مثلث موجود است که نظیرند با سه حالت تساوی دو مثلث و شرایط لازمه و کافیه برای تشابه آنها از روی قضایای ذیل بدست میآید و طریق اثبات در هر سه حالت یکسان و مبتنی است بر اینکه هرگاه دو مثلث متساوی باشند و یکی از آن دو شبیه باشد بمثلث معلومی پس مثلث دیگر نیز شبیه بهمان مثلث خواهد بود.

قضیه ۷ (حالت اول تشابه)

۲۹۶ - هرگاه در دو مثلث سه زاویهٔ نظیر بنظیر متساوی باشند
آن دو مثلث متشابهند.

$B=B'$

فرض میکنیم در دو مثلث ABC و A'B'C' زوایا نظیر بنظیر متساوی باشند یعنی $A=A'$ و



و $C=C'$ س ۲۱۳ گوئیم این دو مثلث متشابهند

برهان - از ضلع AB طول AD را مساوی ضلع A'B' جدا میکنیم و از نقطهٔ D خط DE را بموازات ضلع BC رسم میکنیم و بنابر قضیهٔ سابق مثلث ADE شبیه است بمثلث ABC پس همینقدر کافی است که ثابت کنیم مثلث ADE مساویست بمثلث A'B'C' بنابراین گوئیم در دو مثلث ADE و A'B'C' دو زاویه و ضلع مابینهما متساویست یعنی $AB=A'B'$ بعمل و $\hat{A}=\hat{A'}$ بفرض و $\hat{D}=\hat{B'}$ چونکه هر دو مساویند با $\hat{B}$ ($B=B'$ بفرض و $D=B$ چونکه متقابله اند) پس این دو مثلث متساوی باشند و چون مثلث ADE شبیه است بمثلث ABC پس مساویش مثلث A'B'C' نیز شبیه باشد بمثلث ABC فهو المطلوب

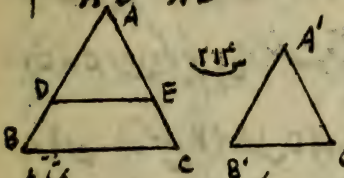
۲۹۵ - نتیجهٔ ۱ - در شرط تشابه دو مثلث همینقدر کافی است که دو زاویهٔ آنها نظیر بنظیر متساوی باشند زیرا که آنوقت زاویهٔ سوم آنها نیز متساوی میشوند و اضلاع متناظره شان متناسب

۲۹۶ - نتیجهٔ ۲ - دو مثلث قائم الزاویه که یک زاویهٔ حادهٔ آنها متساوی باشند متشابهند

قضیهٔ ۸ (حالت دوم تشابه)

۲۹۷ - هرگاه در دو مثلث یک زاویه مساوی باشد و دو ضلع طرفین متناسب آن دو مثلث متشابهند

فرض میکنیم در دو مثلث ABC و A'B'C' (ش ۲۱۴) $A=A'$ و $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}$ گوییم این دو مثلث متشابهند



ش ۲۱۴

برهان - از ضلع AB طول AD را مساوی ضلع A'B' جدا میکنیم و از نقطهٔ D خط DE را موازی با BC رسم میکنیم مثلث ADE شبیه میشود بمثلث ABC پس همینقدر کافی است که ثابت کنیم مثلث A'B'C' مساویست با مثلث ADE

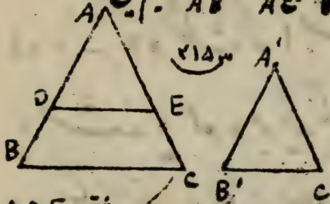
بنابراین گوییم از تشابه دو مثلث ABC و ADE چنین نتیجه میشود $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$

و بنا بفرض $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{AE}$ و $AB=AD$ بعلّت پس در این دو تناسب چون سه جمله مشترک است پس AE و A'C' نیز متساوی میگردند بنابراین در دو مثلث ADE و A'B'C' دو ضلع و زاویهٔ بینهما نظیر بنظیر متساویست یعنی $A=A'$ و $AD=A'B'$ و $AE=A'C'$ پس این دو مثلث متساوی باشند و چون مثلث ADE شبیه است بمثلث ABC پس مساویش A'B'C' نیز شبیه باشد بمثلث ABC

قضیهٔ ۹ (حالت سوم تشابه.)

۲۹۸ - دو مثلث که متناسب الاضلاع باشند متشابهند

فرض میکنیم در دو مثلث ABC و A'B'C' س ۲۱۵ $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}$ گوئیم این دو مثلث متشابهند.



برهان - از ضلع AB طول AD را مساوی ضلع A'B'
جدا میکنیم و از نقطهٔ D خط DE را بموازات BC رسم میکنیم.
مثلث ADE شبیه شود بمثلث ABC پس همینقدر کافی است که ثابت کنیم مثلث ADE
مساوی است بمثلث A'B'C' بنابراین گوئیم از تشابه دو مثلث ADE و ABC چنین نتیجه میشود
$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}=\frac{BC}{DE}$ و بنابر فرض $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}$ و در این دو
رشته تناسب چون دو نسبت اول متساویست زیرا که $A'B'=AD$ بعمل پس چهار
نسبت دیگر نیز متساوی میگردند $\frac{AC}{A'C'}=\frac{AC}{AE}$ و $\frac{BC}{B'C'}=\frac{BC}{DE}$ و از آنجا $A'C'=AE$
و $BC=DE$ بنابراین در دو مثلث ADE و A'B'C' چون سه ضلع نظیر بنظیر مساوی است
پس این دو مثلث متساوی باشند وچون مثلث ADE شبیه است بمثلث ABC پس
مساویش A'B'C' نیز شبیه باشد بمثلث ABC

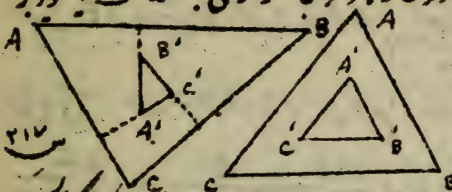
۲۹۹ - **نتیجه** - از تناسب اضلاع دو مثلث تساوی زوایای آنها لازم میآید.

۲۰۰ - **تبصره** - چون سه حالت تشابه دو مثلث را با سه حالت تساوی آنها مقایسه
نمائیم می بینیم در هر حالت تشابه بیش از دو شرط لازم نباشد و حال آنکه هر حالت تساوی
اقتضا کند سه شرط که لااقل یکی از آنها تساوی دو ضلع باشد

قضیهٔ ۱۰

۲۰۱ — دو مثلث که اضلاع متناظره شان مرتباً متوازی باشند یا عمود بر یکدیگر متشابهند

فرض میکنیم اضلاع دو مثلث ABC و $A'B'C'$ مرتباً متوازی باشند ش ۲۱۶ یا عمود بر یکدیگر ش ۲۱۷ گوئیم این دو مثلث متشابهند



ش ۲۱۷

برهان — چون میدانیم وقتیکه اضلاع دو زاویه متوازی باشند یا عمود بر یکدیگر آن دو زاویه متساوی یا مکمل یکدیگرند پس فرضهای ممکنه در شش زاویهٔ دو مثلث معروض منحصر باشد در یکی از سه صورت ذیل

اولاً $A+A'=$ ۲ قائمه و $B+B'=$ ۲ قائمه و $C+C'=$ ۲ قائمه این فرض اول غیر ممکن است زیرا که مجموع شش زاویهٔ دو مثلث نتواند مساوی شش قائمه باشد

ثانیاً $A+A'=$ ۲ قائمه و $B+B'=$ ۲ قائمه و $C=C'$ و این فرض ثانی نیز قابل قبول نیست زیرا که مجموع شش زاویهٔ دو مثلث نتواند از چهار قائمه تجاوز کند

ثالثاً $C=C'$ و $B=B'$ و $A+A'=$ ۲ قائمه این فرض سوم ممکن و قابل قبول است زیرا که چون $B=B'$ و $C=C'$ پس بالضروره $A=A'$ بنابراین دو مثلث ABC و $A'B'C'$ زوایای متناظره متساوی باشند پس این دو مثلث متشابه میگردند و باید دانست که

در فرض سوم هرگاه $\hat{A} = \hat{A'}$ = قائمه آنوقت دو مثلث متشابه قائم الزاویه باشند

۳۰۲ ـ **تبصره ۱** ـ شرایط مذکوره در سه حالت تشابه دو مثلث کافی و لازم باشند و اما شرایط مذکوره در قضیه فوق کافی است نه واجب

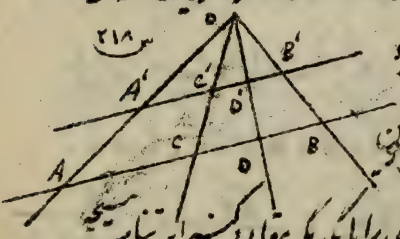
۳۰۳ ـ **تبصره ۲** ـ از قضایای مذکوره چنین نتیجه میشود که مابین اجزای دو مثلث متشابه ABC و A'B'C' همواره پنج رابطه ذیل محقق است $A=A'$ و $B=B'$ و $C=C'$ و $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}$ و چون دو تای از این روابط در اجزای دو مثلث صدق کنند یکی از سه حالت تشابه مذکوره صورت میگیرد و باید دانست که در معرفت اشکال هندسی اغلب تشابه دو مثلث را بکار بریم برای اثبات تساوی دو زاویه یا تساوی نسبت دو خط را با دو خط دیگر

(قضیه ۱۱)

۳۰۴ ـ خطوطی که از یک نقطه مرور کرده باشند دو خط متوازی را باجزای متناسبه قطع کنند

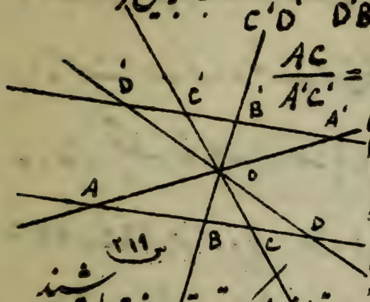
فرض میکنیم دو خط متوازی AB و A'B' را خطوط OA و OC و OD و OB مارّه از یک نقطه قطع کرده باشند نظر بتشابه دو مثلث AOC و A'OC' چنین نتیجه میشود

ش ۲۱۸



$\frac{AC}{A'C'}=\frac{OC}{OC'}$ و از تشابه دو مثلث COD و C'OD' نیز حاصل میشود $\frac{OC}{OC'}=\frac{CD}{C'D'}$ و چون این دو تساوی را با یکدیگر مقایسه کنیم این نسبت نتیجه

میشود $\frac{CD}{C'D'} = \frac{AC}{A'C'}$ و از تشابه دو مثلث COD و C'OD' و همچنین دو مثلث DOB و BOD' باز بهمان طریق این تناسب حاصل میشود $\frac{DB}{D'B'} = \frac{CD}{C'D'}$ و بنابراین رشته تناسب ذیل صورت میگیرد $\frac{AC}{A'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DB}{D'B'}$

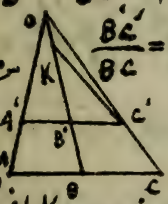


شکل ۲۱۹

تبصره — هرگاه نقطه O مابین دو خط متوازی واقع شود باز قضیه صحیح است و بهمین طریق مبرهن میشود ولی در این حالت اجزای متناظره در روی خطوط متوازیه بعکس ترتیب فوق واقع باشند.

۲۰۰ — بالعکس هرگاه چند خط دو خط متوازی را باجزای متناسبه تقسیم کرده باشند این خطوط در یک نقطه متلاقی شوند — فرض میکنیم سه خط AA' و BB' و CC' دو خط متوازی AC و A'C' را قطع کرده باشند چنانچه $\frac{B'C'}{BC} = \frac{A'B'}{AB}$ گوئیم این خطوط در یک نقطه متقاطع باشند.

بنابراین فرض میکنیم O نقطه تلاقی AA' و BB' باشد پس چنین خواهیم داشت $\frac{B'O}{BO} = \frac{A'B'}{AB}$



شکل ۲۲۰

و فرض میکنیم K نقطه تلاقی BB' و CC' باشد پس چنین خواهیم داشت $\frac{B'K}{BK} = \frac{B'C'}{BC}$

و چون بنابفرض دو نسبت اول متساویست پس $\frac{B'K}{BK} = \frac{B'O}{BO}$

ولی این تناسب غیر ممکن است زیرا که در یک سمت BB' دو نقطه مختلف O و K یافت نشود که فاصله های آنها از B و B' بر یک نسبت باشند و یا اینکه چون این تناسب را بصورت $\frac{B'K}{BK - B'K} = \frac{B'O}{BO - B'O}$ یا $\frac{B'K}{BB'} = \frac{B'O}{BB'}$ تبدیل کنیم چنین حاصل میشود $B'O = B'K$

بنا بر این دو نقطه O و K با هم مختلط میشوند یعنی سه خط مفروض در یک نقطه O متقاطع میگردند.

۴ - کثیر الاضلاعهای متشابهه

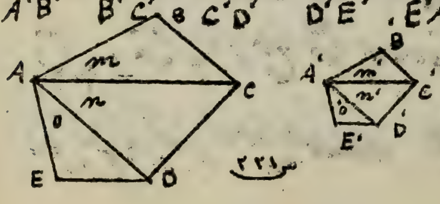
۲۰۶ - **تعریف** - دو کثیر الاضلاع را متشابه گوئیم وقتیکه زوایاشان نظیر بنظیر متساوی باشند و اضلاع متناظره شان متناسب و مقصود از اضلاع متناظره آنهاست که مجاور باشند بزوایای متساویه و باید دانست که در دو کثیر الاضلاع مانند دو مثلث نمیتوان گفت که اضلاع متناظره مقابل باشند بزوایای متساویه زیرا که در هر کثیر الاضلاعی یک ضلع مقابل باشد بچند زاویه - رؤس زوایای متساویه را رؤس متناظره گوئیم و نسبت تشابه دو کثیر الاضلاع متشابهه عبارتست از نسبت دو ضلع متناظره آنها

قضیهٔ ۱۴

۲۰۷ - دو کثیر الاضلاع متشابه را میتوان قسمت کرد بیک عده از مثلثات متشابه و متشابه الوضع

فرض میکنیم دو کثیر الاضلاع ABCDE و A'B'C'D'E' متشابه باشند یعنی $A=A'$ و $B=B'$ و $C=C'$ و $D=D'$ و $E=E'$ و

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DE}{D'E'}=\frac{EA}{E'A'}$$



ش ۲۲۱

از رؤس متناظره A و A' اقطار AC و AD و A'C' و A'D' را

وصل میکنیم و آنوقت در دو مثلث ABC و A'B'C' بنا بفرض $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$
یعنی یک زاویه مساوی و دو ضلع طرفین متناسبند پس این دو مثلث متشابهند و از تشابه
آنها چنین نتیجه میشود $\widehat{B'C'A'} = \widehat{BCA}$ و چون این دو زاویه مساوی را از دو زاویه مساوی
$\widehat{BCD}$ و $\widehat{B'C'D'}$ تفریق کنیم تفاضلشان دو زاویه ACD و A'C'D' نیز مساوی میگردند و از طرف
دیگر نظر بتشابه همان دو مثلث این تناسب حاصل میشود $\frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$ و بنابر تشابه دو کثیر
الاضلاع نیز $\frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'}$ و از مقایسهٔ این دو تناسب چنین نتیجه میشود $\frac{CD}{C'D'} = \frac{AC}{A'C'}$ پس دو مثلث
ACD و A'C'D' نیز دارای یک زاویه مساوی و دو ضلع طرفین متناسبند بنابراین متشابه
باشند و بهمین طریق ثابت میکنیم که سایر مثلثات نیز دو بدو و بترتیب متشابه و متشابه الوضع باشند

۳۰۸ - نتیجه - در دو کثیر الاضلاع متشابه اقطار متناظره واصل بابین رؤس
متناظره متناسب باشند با اضلاع متناظره زیرا که از روی دلایل مذکوره رشته نسبت
متساویه ذیل نتیجه میشود $\frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{AD}{A'D'} = \frac{ED}{E'D'}$ الخ

قضیه ۱۳

۳۰۹ - بالعکس هرگاه دو کثیر الاضلاع مرکب باشند از یکعده از مثلثات
متشابه و متشابه الوضع متشابهند

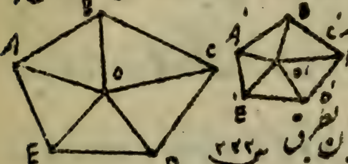
فرض میکنیم دو کثیر الاضلاع ABCDE و A'B'C'D'E' مرکب باشند از یکعده

از مثلثات متشابهه و متشابه الوضع ABC و A'B'C' و ACD و A'C'D' وغیره گوئیم این دو کثیر الاضلاع متشابهند

برهان - اولاً زوایای متناظره دو کثیر الاضلاع مفروض متساوی هستند زیرا که زاویهٔ A مرکب از سه زاویه m و n و o مساویست با زاویهٔ A' مرکب از سه زاویهٔ m' و n' و o' که بفرض مرتباً مساویند با سه زاویهٔ اول و زاویهٔ B مساویست به B' و زاویهٔ C مساویست بزاویهٔ C' چونکه هر دو مرکب باشند از زوایائی که بفرض دو بدو متساویند وهمچنین زاویهٔ D مساویست به D' و زاویهٔ E مساویست بزاویهٔ E' ثانیاً اضلاع متناظره دو کثیر الاضلاع مفروض متناسب هستند زیرا که از تشابه دو مثلث ABC و A'B'C' چنین حاصل میشود $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}$ و از تشابه دو مثلث ACD و A'C'D' باز چنین نتیجه میشود $\frac{AC}{A'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{AD}{A'D'}$ و از تشابه دو مثلث AED و A'E'D' چنین حاصل میشود $\frac{AD}{A'D'}=\frac{ED}{E'D'}=\frac{AE}{A'E'}$ و چون دو رشته نسبت متساویهٔ اول در نسبت $\frac{AC}{A'C'}$ منضم گردند و دو رشته نسبت متساویهٔ ثانی هم در نسبت $\frac{AD}{A'D'}$ اشتراک دارند پس جمیع این نسب متساوی یکدیگرند یعنی $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{ED}{E'D'}=\frac{EA}{E'A'}$ پس در دو کثیر الاضلاع مفروض چون زوایای متناظره متساوی شدند و اضلاع متناظره متناسب پس این دو کثیر الاضلاع متشابه باشند

۲۱۰ - تبصرهٔ ۱ - از روی دو قضیهٔ فوق شرط لازم و کافی برای تشابه دو کثیر الاضلاع

آنست که بتوان آنها را بمثلثات متشابهه و متشابهة الوضع تجزیه نمود پس اگر آنها را n
ضلع باشد هر کثیر الاضلاع بواسطهٔ اقطار بر n−۲ عدد مثلث تجزیه میشود و چون دو متشابه
دو مثلث دو شرط اقتضا کند پس معلوم میشود که کلیهٔ در تشابه دو کثیر الاضلاع n ضلعی باید



(n−۲) ۲ یا ۲n−۴ شرط مختلف تحقق پیدا کنند

۳۱۱ ـ تبصرهٔ ۲ ـ هر کثیر الاضلاع n ضلعی را بتوان بطرق (س ۲۲۲)
مختلفه بمثلثات تجزیه نمود و در قضیه سابقه فرض کردیم که تجزیه دو کثیر الاضلاع بواسطهٔ اقطاری
باشد که از دو رأس نظیر وصل شوند بسایر رئوس اما میتوان بتسییر دو نقطهٔ نظیره O و O' در درون
دو کثیر الاضلاع گرفت و از آن دو نقطه بجمیع رئوس وصل نمود تا هر کثیر الاضلاع n ضلعی
بر n عدد مثلثات تجزیه شود و آنوقت دو نقطه O و O' را نظیر هم گوئیم در صورتیکه چون از آن
دو نقطه بدو طرف دو ضلع AB و A'B' وصل کنیم (س ۲۴۳) دو مثلث ABO و A'B'O' متشابه
و متشابهة الوضع باشند و دو قضیه سابقه از روی تجزیهٔ جدید نیز بسهولت مبرهن میشود و این طریق
تجزیه مخصوصا در حالتیکه کثیر الاضلاع غیر محدب باشد بکار آید

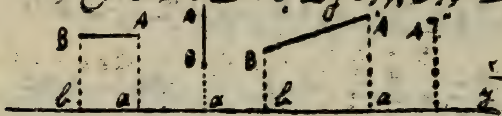
قضیهٔ ۱۴

۳۱۲ ـ محیط دو کثیر الاضلاع متشابهه بر نسبت دو ضلع متناظره باشند
فرض میکنیم ABCDE و A'B'C'D'E' دو کثیر الاضلاع متشابهه باشند و بنابفرض چنین خواهیم

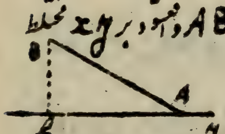
داشت $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DE}{D'E'}=\frac{EA}{E'A'}$ و بنا بر قضیه از حساب در هر رشته
نسب متساویه مجموع صور بر مجموع مخارج مساویست بیکی از آن نسب پس از روی رشته نسب
فوق چنین نتیجه میشود $\frac{AB+BC+CD+DE+EA}{A'B'+B'C'+C'D'+D'E'+E'A'}=\frac{AB}{A'B'}$ و چون صورت نسبت اول
عبارتست از مجموع اضلاع یعنی محیط کثیر الاضلاع ABCDE و مخرجش نیز محیط کثیر الاضلاع
A'B'C'D'E' پس اگر این دو محیط را به P و P' بنامیم تناسب فوق بدین صورت نوشته میشود $\frac{P}{P'}=\frac{AB}{A'B'}$

۵ – روابط طولی مابین اجزای مثلث

۳۱۲ – **تعریف** – تصویر نقطه A بر خط xy عبارتست از نقطه a موقع عمود وارد
از نقطه A بر خط xy ش ۲۲۳

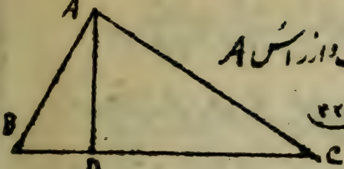


تصویر قطعه خط AB ش ۲۲۴ بر خط غیر محدود xy عبارتست از فاصله محصور مابین a
و b تصاویر A و B طرفین خط AB و وقتیکه نقطه A انتهای خط AB واقع شود بر xy مختلط
میگردد با تصویرش مثلاً تصویر AB عبارتست از bA ش ۲۲۵



قضیه ۱۵

۳۱۴ – چون از رأس زاویه قائمه از مثلث قائم الزاویه عمودی بر وتر فرود آوریم
اولاً هر ضلع مجاور بزاویه قائمه واسطه هندسی است مابین تمام وتر و تصویرش بر وتر ثانیاً
عمود وارد از رأس زاویه قائمه بر وتر واسطه هندسی است مابین دو قطعه وتر



برهان ـ مثلث قائم الزاویه ABC مفروض است و از راس A
عمود AD را بر وتر BC فرود میآوریم (۲۲۴)

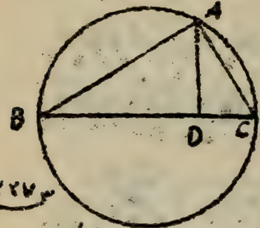
اولاً دو مثلث قائم الزاویه ADB و ADC متشابهند و متشابه با مثلث قائم الزاویه ABC
زیرا که اولی در زاویه حادهٔ B و دومی در زاویه حادهٔ C با مثلث ABC مشارکند پس
از تشابه مثلث ADB و ABC اضلاع متناظرهٔ مقابل بزوایای متساویه متناسب باشند و چنین
حاصل میشود $\frac{AB}{BC}=\frac{BD}{AB}$ یا $\overline{AB}^2 = BC\times CD$ یعنی ضلع AB مجاور بزاویهٔ قائمه
واسطهٔ هندسی است مابین تمام وتر BC و تصویرش BD بر وتر و همچنین از تشابه دو مثلث
ADC و ABC این تناسب حاصل میشود $\frac{BC}{AC}=\frac{AC}{DC}$ یا $\overline{AC}^2=BC\times DC$
یعنی AC واسطهٔ هندسی است مابین BC و DC

ثانیاً دو مثلث ADB و ADC چون هر دو شبیه‌اند بمثلث ABC پس متشابه‌اند بیکدیگر
(تشابه این دو مثلث مستقیماً نیز ظاهر است چونکه اضلاعشان بترتیب عمودند بر یکدیگر)
و از تشابه این دو مثلث اضلاع متناظره مقابل بزوایای متساویه متناسب باشند و این تناسب
حاصل شود $\frac{BD}{AD}=\frac{AD}{CD}$ یا $\overline{AD}^2 = BD\times CD$ یعنی عمود AD واسطهٔ هندسی است مابین
BD و CD دو قطعهٔ وتر

۳۱۵ ـ نتیجهٔ ۱ ـ در مثلث قائم الزاویه نسبت مجذور دو ضلع مجاور بزاویهٔ قائمه

$\overline{AB}^2 = BC \times BD$

$\overline{AC}^2 = BC \times CD$



شکل ۲۲۷

مساویست بانسبت دو تصویر آن دو ضلع بر وتر زیرا که چون دو تساوی عضو بعضو بر یکدیگر قسمت کنیم چنین حاصل میشود $\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}=\frac{BD}{CD}$

۳۱۶ـ نتیجه ۲ ـ چون از نقطهٔ A از محیط دایره بطرفین قطر BC وصل کنیم مثلث قائم الزاویهٔ ABC تشکیل میشود که بموجب قضیهٔ سابقه گوئیم اولاً هر وتر در دایره واسطهٔ هندسی است مابین قطریکه از انتهای آن گذشته و تصویرش بر آن قطر یعنی $\overline{AB}^2=BC\times BD$ و $\overline{AC}^2=BC\times CD$ ثانیاً عمود وارد از نقطه از محیط دایره بر قطر واسطهٔ هندسی است مابین دو قطعهٔ آن قطر یعنی $\overline{AD}^2=BD\times CD$

قضیهٔ فیثاغورث ۱۶

۳۱۷ـ در مثلث قائم الزاویه مربع وتر مساوی است با مجموع مربع دو ضلع دیگر

(مقصود مربعات در اینجا مجذورات اعدادیست که اندازهٔ طول اضلاع مثلث باشند)

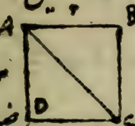
بنابر قضیهٔ سابقه $\overline{AB}^2=BC\times BD$ و $\overline{AC}^2=BC\times CD$ و چون این دو تساوی را عضو بعضو با یکدیگر جمع کنیم چنین شود $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=BC(BD+CD)=\overline{BC}^2$

۳۱۸ـ نتیجه ۱ ـ در مثلث قائم الزاویه مربع هر ضلع مجاور بزاویهٔ قائمه مساویست با مربع وتر منهای مربع ضلع دیگر زیرا که از رابطهٔ $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$ دو رابطهٔ ذیل حاصل میشود

$$\overline{AC}^2=\overline{BC}^2-\overline{AB}^2 \quad , \quad \overline{AB}^2=\overline{BC}^2-\overline{AC}^2$$

۳۱۹- نتیجهٔ ۲- نسبت قطر مربع بضلع مربع مساویست با عدد اصم $\sqrt{2}$ زیراکه در مربع
ABCD چون قطر AC را وصل کنیم از مثلث قائم الزاویه ABC چنین حاصل میشود

ش ۲۲۸



$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{AB}^2$ و ازآنجا $\frac{AC}{AB} = \sqrt{2}$

۳۲۰- تبصرهٔ ۱- در مثلث قائم الزاویه ABC چون وتر BC را به a بنمایم و دو ضلع AC
و AB را به b و c و تصاویرشان را بر وتر به b' و c' و بالاخره عمود AD را به h پس موجب
دو قضیهٔ سابقه ما بین این شش خط چهار رابطه موجود است $a^2=b^2+c^2$ ، $b^2=ab'$ ، $c^2=ac'$ و
$h^2=b'c'$ و از روی این روابط میتوان چهار خط را حساب نمود وقتیکه دو خط دیگر معلوم باشند

مثال ۱- از مثلث قائم الزاویه دو ضلع $b=4$ و $c=3$ معلوم‌اند میخواهیم وتر a و تصاویر
b' و c' و ارتفاع h را حساب کنیم چنین خواهیم داشت $a^2=b^2+c^2=16+9=25$
و ازآنجا $a=5$ و چون $b^2=ab'$ و $c^2=ac'$ ازآنجا $b'=\frac{b^2}{a}=\frac{16}{5}=3,2$ و $c'=\frac{c^2}{a}=\frac{9}{5}=1,8$
و بالاخره $h^2=b'c'=3,2\times1,8=5,76$ پس $h=\sqrt{5,76}=2,4$

مثال ۲- در مثلث قائم الزاویه وتر و یک ضلع معلوم $a=7$ و $b=4$ میخواهیم ضلع c و تصاویر
b' و c' و ارتفاع h را حساب کنیم چنین خواهیم داشت $c^2=a^2-b^2=49-16=33$
و ازآنجا $c=\sqrt{33}=5,744$ و چون c بدست آمد مسئله راجع میشود بمسئلهٔ فوق پس
$c'=\frac{c^2}{a}=\frac{33}{7}=4,714$ و $b'=\frac{b^2}{a}=\frac{16}{7}=2,286$ و بالاخره

$$h^2=b'c'=2,286\times4,714=10,776204$$

$$h = \sqrt{10{,}776204} = 3{,}282$$

مثال ۳ — در مثلث قائم‌الزاویه دو تصویر ۴ = متر m و ۵ متر = n معلومند میخواهیم سایر اجزای مثلث را حساب کنیم چون وتر a مساویست بمجموع دو تصویر دو ضلع پس $a = 9$ = ۵ + ۴ متر

واز رابطه $b^2 = am$ و $c^2 = an$ چنین حاصل میشود $b^2 = 9 \times 4 = 36$ و $c^2 = 9 \times 5 = 45$

واز آنجا $b = \sqrt{36} = 6$ متر و $c = \sqrt{45} = 6{,}708$ متر وبالاخره $h = \sqrt{mn} = \sqrt{20} = 4{,}472$

۳۲۱ — تبصره ۲ — از روی روابط ذیل اضلاع مثلث قائم‌الزاویه باعداد صحاح بدست میاید

$a^2 + \left(\frac{a^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2+1}{2}\right)^2$ این دستور منسوبست بفیثاغورث یونانی و a عبارتست از یک ضلع مجاور بزاویهٔ قائمه و آنرا باید عدد فرد گرفت مثلاً اگر ضلع a را ۳ متر فرض کنیم از روی این دستور طول وتر میشود ۵ متر و ضلع دیگر ۴ متر

$$a^2 + \left(\frac{a^2}{4}-1\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4}+1\right)^2$$

این دستور نیز منسوبست بافلاطون و ضلع a را باید عدد زوج گرفت مثلاً اگر ضلع a را ۱۲ متر فرض کنیم وتر میشود ۲۰ متر و ضلع دیگر ۱۶ متر و اما دستور کلی این است

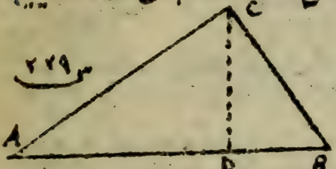
$4x^2y^2 + \left(y^2 - x^2\right)^2 = \left(y^2 + x^2\right)^2$ و در آن x و y عبارتند از دو ضلع مجاور بزاویهٔ قائمه

قضیهٔ ۱۷

۳۲۲ — در هر مثلث مربع ضلع مقابل بزاویهٔ حاده مساویست با مجموع مربعین دو ضلع دیگر منهای مضاعف حاصل ضرب

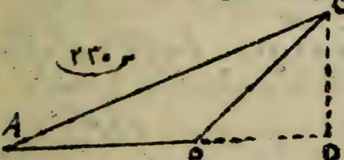
یکی از آن دو ضلع در تصویر ضلع دیگر بر همین ضلع

فرض میکنیم در مثلث ABC زاویهٔ A حاده باشد از رأس C عمود CD را بر ضلع AB فرود میآوریم



شکل ۲۲۹

این عمود واقع شود در داخل یا خارج مثلث بحسب آنکه زاویهٔ B حاده یا منفرجه باشد در هر دو حالت باید ثابت کرد



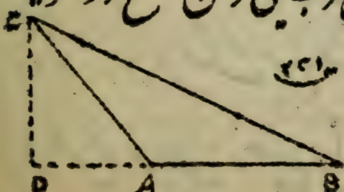
شکل ۲۳۰

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2AB \times AD$$

برهان — از مثلث قائم الزاویه BDC چنین حاصل میشود $\overline{BC}^2=\overline{BD}^2+\overline{DC}^2$ و از طرف دیگر $BD = AB - AD$ یا $BD = AD - AB$ بحسب آنکه زاویهٔ B حاده یا منفرجه باشد و در هر دو حالت چون طرفین یکی از این دو تساوی را تربیع کنیم چنین میشود $\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{AD}^2-2AB\times AD$ پس $\overline{BC}^2=\overline{DC}^2+\overline{AB}^2+\overline{AD}^2-2AB\times AD$ و چون $\overline{DA}^2+\overline{DC}^2=\overline{AC}^2$ پس $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2AB\times AD$ فهو المطلوب

قضیه ۱۸

۳۲۳ — در هر مثلث مربع ضلع مقابل بزاویهٔ منفرجه مساوی است با مجموع مربع دو ضلع دیگر باضافه مضاعف حاصل ضرب یکی از آن دو ضلع در تصویر ضلع دیگر بر همین ضلع



شکل ۲۳۱

فرض میکنیم در مثلث ABC زاویهٔ A منفرجه باشد و از رأس

C عمود CD را بر ضلع AB فرود بیاوریم این عمود واقع شود در خارج مثلث و باید
ثابت کرد که $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2AB \times AD$

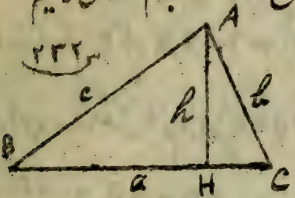
برهان — از مثلث قائم الزاویهٔ BDC چنین حاصل میشود $\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2$ از طرف دیگر
$BD = AB + AD$ پس از تربیع چنین میشود $\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 + 2AB \times AD$ پس
$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 + 2AB \times AD$ و چون $\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{AC}^2$

پس بالاخره $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2AB \times AD$ فهو المطلوب

۳۲۴ — نتیجه — از سه قضیهٔ مذکوره (نمره ۳۱۷ و ۳۱۵ و ۳۲۱) چنین نتیجه میشود که
موافق آنکه زاویهٔ مثلث قائمه یا حاده یا منفرجه باشد مربع ضلع مقابل با آن زاویه مساوی یا کوچکتر
یا بزرگتر است از مجموع دو مربع دو ضلع دیگر و بالعکس موافق آنکه مربع یک ضلع مثلث کوچکتر یا
مساوی یا بزرگتر از مجموع مربع دو ضلع دیگر باشد زاویهٔ مقابل با آن ضلع حاده یا قائمه یا
منفرجه است و بوسیلهٔ این احکام میتوان زوایای مثلث ABC را از روی اضلاعش a
و b و c تشخیص داد و فقط شناختن زاویهٔ بزرگتر یعنی زاویهٔ مقابل بضلع بزرگتر کافی است
زیرا که دو زاویهٔ دیگر بالضروره حاده باشند و بنابراین باید مجذور ضلع اطول را با
مجموع مجذورات دو ضلع دیگر سنجید

۳۲۵ — مسئله — میخواهیم ارتفاعات مثلث را از روی اضلاع حساب کنیم

مثلاً میخواهیم در مثلث ABC طول ارتفاع وارد بر ضلع a را حساب کنیم فرض میکنیم



س ۲۳۲

که از دو زاویه B و C اقلاً یکی مثلاً B حاده باشد

پس چنین خواهیم داشت $b^2 = a^2 + c^2 - 2a \times \overline{BH}$

و از اینجا $\overline{BH} = \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}$ و از مثلث قائم الزاویه ABH چنین حاصل میشود

$\overline{AH}^2 = c^2 - \overline{BH}^2$ پس $\overline{AH}^2 = c^2 - \frac{(a^2+c^2-b^2)^2}{4a^2} = \frac{4a^2c^2-(a^2+c^2-b^2)^2}{4a^2}$

و چون ملاحظه نمائیم که تفاضل مجذورات دو عدد مساویست با حاصل ضرب مجموع در تفاضلشان

پس $\overline{AH}^2 = \frac{(2ac+a^2+c^2-b^2)(2ac-a^2-c^2+b^2)}{4a^2} = \frac{[(a+c)^2-b^2][b^2-(a-c)^2]}{4a^2}$

و از اینجا $\overline{AH}^2 = \frac{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{4a^2}$

و اگر قرار دهیم $2p = a+b+c$ چنین خواهیم داشت

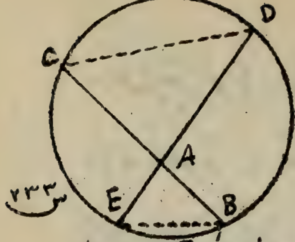
پس $\overline{AH}^2 = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2}$ ، $AH = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

۶ـ خطوط متناسبه در دایره

قضیه ۱۹

۳۲۶ـ هرگاه دو وتر در دایره متقاطع باشند حاصل ضرب دو قطعه یکی مساوی است با حاصل ضرب دو قطعه دیگری

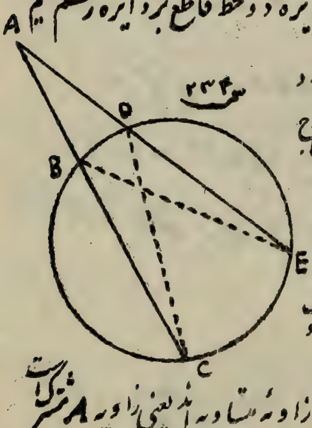
فرض میکنیم دو وتر BC و DE در نقطه A متقاطع باشند گوئیم $AB \times AC = AD \times AE$



برهان — دو خط BE و CD را وصل میکنیم آنوقت دو مثلث
ABE و ADC متشابه میباشند زیرا که دارای دو زاویه متساوی اند
یعنی دو زاویه در A چون متقابله برأس‌اند متساوی میباشند و دو زاویهٔ E و C چون
بمقیاس هر دو نصف قوس BD است متساوی میباشند پس از تشابه این دو مثلث اضلاع متناظر
متناسب باشند چنین نتیجه میشود $\frac{AB}{AD}=\frac{AE}{AC}$ و از آنجا $AB\times AC=AD\times AE$

قضیهٔ ۲۰

۳۲۷ — هرگاه دو خط قاطع در خارج دایره متقاطع باشند حاصل ضرب تمام یکی از آن دو قاطع در جزء خارجی خود مساویست با حاصل ضرب تمام قاطع دیگر در جزء خارجی آن و یا باین عبارت ادا کنیم چون از نقطهٔ واقعه در خارج دایره دو خط قاطع بر دایره رسم کنیم تمام آن دو خط متناسبند بر عکس با دو جزء خارجی خود



فرض میکنیم دو قاطع AC و AE در نقطه A واقع در خارج دایره متقاطع باشند گوئیم $AB\times AC=AD\times AE$

برهان — دو خط BE و CD را وصل میکنیم آنوقت دو مثلث ABE و ADC متشابه میباشند زیرا که دارای دو زاویهٔ متساویه اند یعنی زاویه A مشترک است و دو زاویهٔ E و C چون مقیاس هر دو نصف قوس BD است متساوی میباشند پس از تشابه آن

دو مثلث چنین نتیجه میشود $\frac{AB}{AD}=\frac{AE}{AC}$ واز آنجا $AB \times AC = AD \times AE$

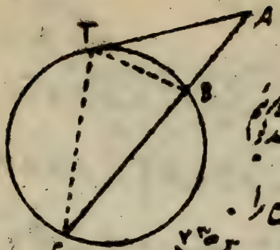
۳۲۸ – تبصرهٔ – دو قضیهٔ مذکوره هیچ اختلافی ندارند جز آنکه در اولی نقطهٔ تلاقی دو خط قاطع در داخل دایره افتاده و در دومی در خارج پس میتوان هر دو حکم را بیک عبارت ادا نمود که چون از نقطهٔ واقعه بر صفحهٔ دایره خطوط قاطع رسم کنیم حاصل ضرب دو فاصلهٔ این نقطه از دو نقطهٔ تلاقی هر قاطع با دایره در تمام آنها یکی است

۳۲۹ – بالعکس – چون بر دو خط متقاطع بر نقطهٔ A چهار نقطهٔ B و C و D و E را چنان اختیار کنیم که $AB \times AC = AD \times AE$ گوئیم این چهار نقطه بر محیط دایره واقع باشند (در صورتیکه نقطهٔ A واقع باشد در داخل هر دو خط BC و DE ش ۳۳۲ یا در خارج هر دو ش ۳۳۳)

برهان – چون بر سه نقطهٔ B و C و D یک دایره مرور دهیم گوئیم بر نقطهٔ E نیز خواهد گذشت زیرا که فرض میکنیم این دایره خط AD را در نقطهٔ E' قطع کند بنا بر دو قضیهٔ سابقه چنین حاصل میشود $AB \times AC = AD \times AE'$ و چون این تساوی را با تساوی سابقه مقایسه نمائیم چنین نتیجه میشود $AE = AE'$ پس نقطهٔ E' منطبق میشود بر E و بنا براین دایره بر E نیز مرور میکند

قضیهٔ ۲۱

۳۳۰ – چون از نقطهٔ واقعه در خارج دایره یک خط قاطع و یک خط مماس بر دایره رسم کنیم خط مماس واسطهٔ هندسی است



باین تمام قاطع و جزء خارجی آن

فرض میکنیم خط AC قاطع و AT مماس بر دایره باشد گوئیم

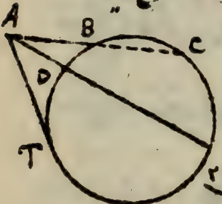
$\overline{AT}^2 = AB \times AC$ برهان — دو وتر BT, CT را.

وصل میکنیم آنوقت دو مثلث ABT, ACT متشابه باشند زیرا که دارای دو زاویه متساویهٔ

یعنی زاویهٔ A مشترک و دو زاویهٔ $\hat{C}$ و $\widehat{ABT}$ چون مقیاس هر دو نصف قوس BT است

متساوی باشند پس از تشابه این دو مثلث چنین نتیجه میشود $\frac{AT}{AB} = \frac{AC}{AT}$ و از آنجا $\overline{AT}^2 = AB \times AC$

۳۳۱ — دلیل دیگر — فرض میکنیم AC قاطع و AT مماس بر دایره باشد و خط قاطع دیگر AE



را رسم میکنیم تا این تساوی حاصل شود $AB \times AC = AD \times AE$

و چون قاطع AE را در حول A دوران دهیم و منطبق کنیم بر مماس

AT فاصلهٔ AD و AE تغییر کنند ولی حاصل ضربشان همواره ثابت و مساوی با $AB \times AC$

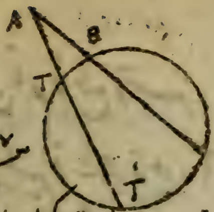
پس وقتیکه دو نقطهٔ E و D بر هم منطبق شوند یعنی قاطع AE بر مماس AT منطبق گردد AE و

AD هر دو مساوی شوند با AT پس تساوی فوق چنین میشود $\overline{AT}^2 = AB \times AC$

۳۳۲ — و بالعکس اگر دو خط بر نقطهٔ A متقاطع باشند و بر یکی دو نقطهٔ B و C در یک سمت A

اختیار کنیم و بر دیگری یک نقطهٔ T چنانچه $\overline{AT}^2 = AB \times AC$ گوئیم دایره‌ای که بر سه نقطهٔ B و

C و T مماس شود بر AT — برهان — هرگاه دایره‌ای مار و بر سه نقطهٔ B و C و T



شکل ۲۳۷

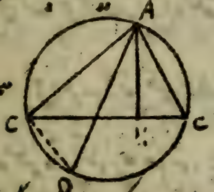
خط AT را در نقطهٔ دیگر T́ نیز قطع کند چنین حاصل میشود

$AT \times A\acute{T} = AB \times AC$ و چون این تساوی را با تساوی مفروضه مقایسه کنیم چنین نتیجه میشود

$AT = A\acute{T}$ پس بالضروره نقطهٔ T́ منطبق شود بر T و آنوقت AT مماس شود بر دایره

قضیهٔ ۲۲

۳۳۳ حاصل ضرب دو ضلع هر مثلث مساویست با حاصل ضرب قطر دایرهٔ محیطه در ارتفاع وارد بر ضلع سوم



شکل ۲۳۸

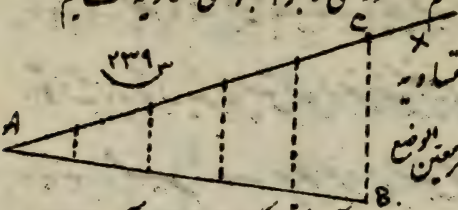
فرض میکنیم AD قطر دایرهٔ محیط بر مثلث ABC باشد و AH ارتفاع وارد بر ضلع BC دو مثلث AHC و ABD قائم الزاویه اند یکی بر H و دیگری بر B و دو زاویهٔ C و D چون بقیاس هر دو نصف قوس AB است متساوی باشند پس این دو مثلث متشابهند و چنین نتیجه میشود $\frac{AH}{AB} = \frac{AC}{AD}$ و از آنجا $AB \times AC = AH \times AD$

۳۳۴ — تبصره — از روی این قضیه بر فرض معلوم بودن اضلاع مثلث میتوان شعاع دایرهٔ محیطه را بدست آورد فرض میکنیم R شعاع دایرهٔ محیطه باشد پس بحکم این قضیه چنین حاصل میشود $bc = AH \times 2R$ و از آنجا $R = \frac{bc}{2AH}$ و چون بجای ارتفاع AH مقدارش را قرار دهیم (نمرهٔ ۳۲۶) چنین میشود

$$R = \frac{abc}{4p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

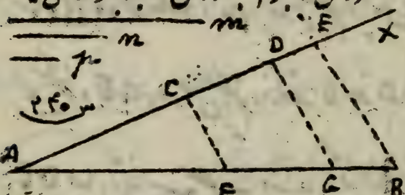
۷ — مسائل در خطوط متناسبه

۳۳۵ - مسئلهٔ ۱ - میخواهیم خط مفروضی را بر اجزای متساویه قسمت کنیم مثلاً



میخواهیم خط AB را بر پنج جزء متساویه قسمت کنیم ش ۲۳۹ از نقطهٔ A خط غیر معین الوضع AX را رسم میکنیم و بعد بعد پرگار پنج طول متساویه بر آن نقل میکنیم و چون از آخرین نقطهٔ C به B وصل کنیم و از جمیع نقاط تقسیم AC خطوط بموازات BC رسم کنیم خط AB نیز به ۵ جزء متساویه قسمت میشود زیرا که دو خط AC و AB بر اجزای متناسبه قسمت شد و چون اجزای AC متساوی هستند پس اجزای AB نیز متساوی میگردند

۳۳۶ - مسئله ۲ - میخواهیم خط مفروضی را بر اجزای متناسبه با طولهای معینه قسمت کنیم

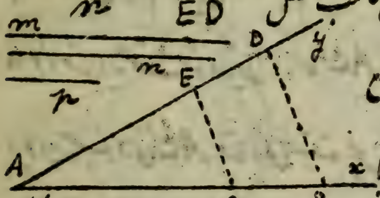


مثلاً میخواهیم خط AB را بر نسبت سه خط m و n و p قسمت کنیم ش ۲۴۰ از نقطهٔ A خط غیر معین الوضع AX را رسم میکنیم و طولهای AC و CD و DE را که مستقیماً و مرتباً برابر با خطوط m و n و p است از آن جدا میکنیم و از آخرین نقطه E به B وصل میکنیم و از دو نقطهٔ تقسیم C و D دو خط بموازات BE رسم میکنیم پس خط AB در دو نقطهٔ F و G بر نسبت سه خط مفروض قسمت میشود (فقرهٔ ۲۸۲) یعنی

$$\frac{AF}{m}=\frac{FG}{n}=\frac{GB}{p} \quad \text{یا} \quad \frac{AF}{AC}=\frac{FG}{CD}=\frac{GB}{DE}$$

۳۳۷ — **تبصره** — همین قاعدهٔ مذکوره بکار میرود برای تقسیم خطی بر نسبت اعداد مفروضه دانوقت باید طولهائیکه نمایش اعداد مفروضه باشند بر خط AX نقل نمود

۳۳۸ — **مسئلهٔ ۳** — سه خط مفروض است میخواهیم خط چهارم تناسب آنها را معلوم کنیم مثلاً میخواهیم خط چهارم تناسب سه خط مفروض m و n و p را معلوم کنیم یعنی خطی مانند ED (شکل ۲۴۱) بدست آوریم که این تناسب حاصل شود $\frac{m}{n}=\frac{p}{ED}$



(شکل ۲۴۱)

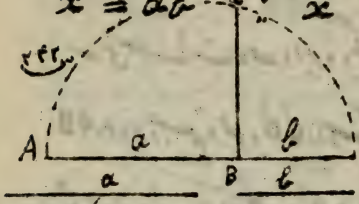
یک زاویهٔ yAx رسم میکنیم و از ضلع Ax دو طول AC و CB را بترتیب مساوی با دو خط m و n جدا میکنیم و همچنین از ضلع Ay طول AE را برابر با p جدا میکنیم و CE را وصل میکنیم و از نقطهٔ B خط BD را بموازات CE رسم میکنیم پس خط DE چهارم تناسب مطلوب است زیراکه از توازی دو خط CE و BD چنین حاصل میشود

$$\frac{m}{n}=\frac{p}{DE} \quad \text{و یا} \quad \frac{AC}{CB}=\frac{AE}{ED}$$

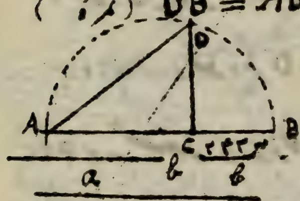
۳۳۹ — **تبصره** — هرگاه دو طول n و p متساوی باشند خط ED سوم تناسب مابین m و n خواهد بود و بهمین وجه عمل میکنیم و چنین خواهیم داشت $\frac{m}{n}=\frac{n}{DE}$

۳۴۰ — **مسئلهٔ ۴** — میخواهیم واسطهٔ هندسی مابین دو خط مفروض معلوم کنیم مثلاً میخواهیم مابین دو خط مفروض a و b واسطهٔ هندسی معلوم کنیم یعنی طولی مانند x

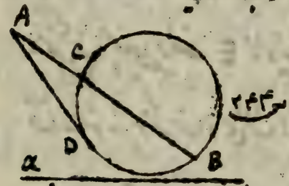
بدست آوریم چنانچه این تناسب حاصل شود $\frac{a}{x}=\frac{x}{b}$ یا $x^2=ab$



وجه اول ـ دو طول AB و BC را مرتباً مساوی
با دو خط مفروض a و b بر خط غیر معینی نقل میکنیم
و بقطر AC یک نیم دایره دور میدهیم و از نقطه B عمود DB را بر AC اخراج میکنیم
این عمود واسطه هندسی مطلوبست زیرا که $\overline{DB}^2 = AB \times BC$ (نمره)

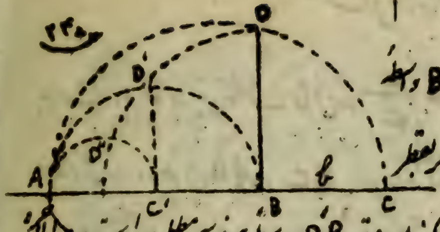


وجه دوم ـ بر خط غیر معینی طول AB را مساوی خط
a نقل میکنیم و ابتدا از نقطه A طول AC را مساوی خط b
بر AB نقل میکنیم و بقطر AB یک نیم دایره رسم میکنیم و از نقطه C عمود CD را بر AB خارج
میکنیم بعد وتر AD را رسم میکنیم این وتر واسطه هندسی مطلوب است زیرا که $\overline{AD}^2 = AB \times AC$



وجه سوم ـ بر خط غیر معین طول AB را مساوی خط a نقل
میکنیم و ابتدا از نقطه A طول AC را مساوی خط b از AB
جدا میکنیم و BC را قطر و یا وتر قرار داده یک دایره رسم میکنیم و بعد مماس AD را رسم
میکنیم این خط مماس واسطه هندسی مطلوبست زیرا که $\overline{AD}^2 = AB \times AC$ (نمره ۲۳۰)

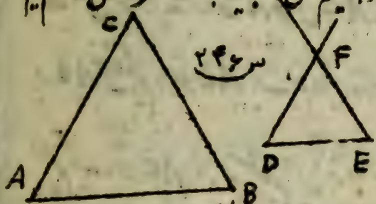
۲۴۱ ـ تبصره ـ سه وجه مذکور فوق را میتوان در یک شکل قرار داد باین طریق که بر خط
غیر معینی طول $AB = a$ و $BC = b$ و بهمچنین $BC' = b$ را نقل نمائیم ش ۲۴۵ و ابتدا



ش ۲۴۵

دایره بقطر AC رسم کنیم پس عمود BD واسطهٔ
هندسی مطلوب است و بعد دایرهٔ دیگر بقطر
AB مرور دهیم و عمود C'D' را رسم کنیم پس وتر D'B واسطهٔ هندسی مطلوب است ۲ بالاخره
یک دایره بر دو نقطهٔ A و C' مرور دهیم پس D''B باز واسطهٔ هندسی مطلوب است
و برای تحقیق این ترسیمات کافی است که دایره بمرکز B و بشعاع DB رسم کنیم این
دایره باید از دو نقطهٔ دیگر D' و D'' نیز مرور نماید

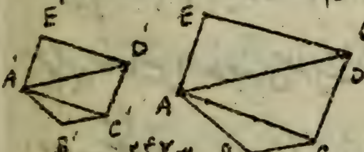
۲۴۲ — مسئله ۵ — بر خط مفروضی میخواهیم مثلثی شبیه بمثلث مفروضی رسم کنیم



ش ۲۴۶

مثلث ABC و خط DE نظیر ضلع AB
مفروض است بر نقطهٔ D زاویه مساوی زاویهٔ A
رسم میکنیم و همچنین بر نقطهٔ E زاویهٔ مساوی زاویهٔ B پس دو مثلث ABC و DEF
متشابه میشوند چونکه متساوی الزوایا هستند

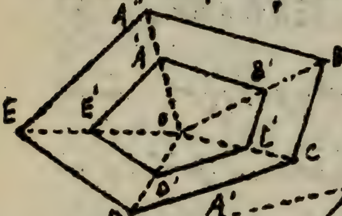
۲۴۳ — مسئله ۶ — بر خط مفروضی میخواهیم کثیر الاضلاعی متشابه بکثیر الاضلاع مفروضی رسم کنیم



ش ۲۴۷

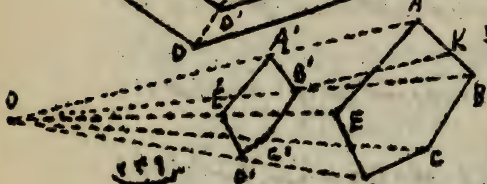
مثلاً میخواهیم بر خط A'B' نظیر ضلع AB کثیر الاضلاعی
متشابه بکثیر الاضلاع ABCDE رسم کنیم
وجه اول — کثیر الاضلاع مفروض را بواسطهٔ دو قطر AC و AD بمثلثات تجزیه میکنیم

در خط مفروض A'B' مثلث A'B'C' را مشابه بمثلث ABC رسم میکنیم و بعد بر خط A'C' مثلث A'C'D' را مشابه بمثلث ADC و بالاخره بر خط A'D' مثلث A'D'E' را مشابه بمثلث ADE پس کثیر الاضلاع ABCDE و A'B'C'D'E' متشابه باشند چونکه مرکب‌اند از یکعده از مثلثات متشابه و متشابه الوضع



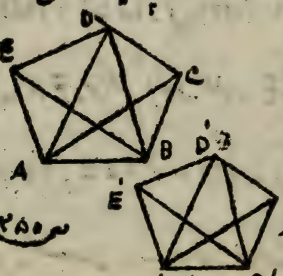
شکل ۲۴۸

وجه دوم — بر صفحهٔ کثیر الاضلاع مفروض



شکل ۲۴۹

نقطهٔ مثل O در داخل (شکل ۲۴۸) یا در خارج (شکل ۲۴۹) کثیر الاضلاع نشان میکنیم و از آن بجمیع رؤس وصل میکنیم و بعد در زاویهٔ AOB خط مفروض A'B' را بموازات AB رسم میکنیم (باین وجه که از ضلع AB طول AK را مساوی A'B' جدا کنیم و از K خطی بموازات AO رسم کنیم تا خط OB را در نقطهٔ B' قطع کند و خط A'B' را بموازات AB رسم کنیم) و در زاویهٔ BOC خط B'C' را بموازات BC و بعد در زاویهٔ COD خط C'D' را بموازات CD و هکذا آخرین موازی که در زاویهٔ EOA از E' با AE رسم شود میگذرد بر نقطهٔ A' پس کثیر الاضلاع A'B'C'D'E' شبیه میشود بکثیر الاضلاع مفروض ABCDE



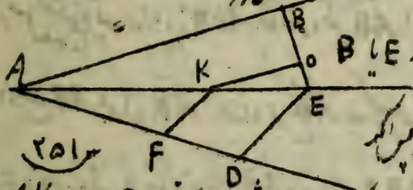
وجه سوم — در کثیر الاضلاع مفروض جمیع اقطار که کشیده شده از A و B را رسم میکنیم و بر

شکل ۲۵۰

نقطهٔ A' زوایای $B'A'C'$ و $C'A'D'$ و $D'A'E'$ را مرتباً مساوی با زوایای BAC و CAD و
DAE میسازیم و همچنین بر نقطهٔ B' زوایای $A'B'E'$ و $E'B'D'$ و $D'B'C'$ را مرتباً مساوی
با زوایای ABE و EBD و DBC پس نقاط A' و B' و C' و D' و E'
عبارتند از رؤس کثیر الاضلاع مطلوب بشبیه کثیر الاضلاع مفروض $ABCDE$

۳۴۴ ـ مسئلهٔ ۷ ـ از نقطهٔ واقعه در درون زاویهٔ مفروضه خطی چنان بگذرانید
که دو قطعهٔ خط واقع مابین نقطهٔ مفروضه و دو ضلع زاویه بر نسبت مفروضی باشد

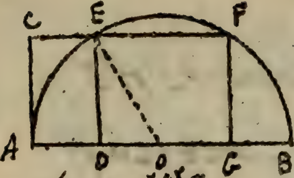
فرض میکنیم مسئله حل شده خط DE در نقطهٔ O بر نسبت $\frac{m}{n}$ قسمت شده باشد یعنی
$\frac{OB}{OE} = \frac{m}{n}$ و باید وضع نقطهٔ E یا B
از خط مطلوب BE را بدست آورد پس اگر



(ش ۲۵۱)

از نقطهٔ O خط OK را بموازات AB رسم کنیم چنین حاصل میشود $\frac{AK}{KE} = \frac{OB}{OE} = \frac{m}{n}$
پس KE چهارم متناسب خطوط n و m و AK است و بنابراین از خط غیر معین AX خطوط
AF و FD را مرتباً مساوی m و n جدا میکنیم و FK را وصل میکنیم و از D خط DE را
بموازات FK رسم میکنیم تا نقطهٔ مطلوبهٔ E بدست آید و اگر m و n مساوی باشند
دو قطعه خط OB و OE نیز متساوی میشوند و راه حل مسئله بسیار سهل است

۳۴۵ ـ مسئلهٔ ۸ ـ دو خط رسم کنید در صورتیکه مجموعشان و واسطهٔ هندسیشان معلوم باشند



فرض میکنیم $AB = a$ مجموع و $AC = b$ واسطهٔ هندسی دو خط مطلوب باشند بقطر AB یک نیم دایره رسم میکنیم و از نقطهٔ A خط AC را بطول b بر AB عمود میکنیم و از نقطهٔ C خطی موازات AB رسم میکنیم تا نیم دایره را در دو نقطه E و F قطع کند و بعد عمود ED (یا FG) را بر AB فرود میآوریم و گوئیم AD و DB عبارتند از دو خط مطلوب زیرا که

$AD + DB = AB = a$ و $\overline{AC}^2 = b^2$ و $AD \times DB = \overline{AC}^2$

و شرط لازم و کافی برای اینکه مسئله ممکن باشد آن است که واسطهٔ هندسی کوچکتر یا مساوی باشد با نصف مجموع دو خط یعنی $\frac{a}{2}$

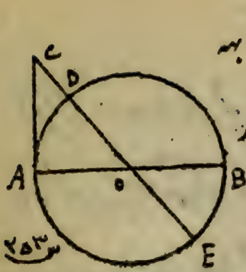
تبصره — دو طول مطلوب AD و DB را میتوان بحسب a و b حساب نمود از این قرار

$AD = OA - OD$ و $DB = OB + OD$ و چون $OA = OB = \frac{a}{2}$ و $OD = \sqrt{\overline{OE}^2 - \overline{ED}^2}$

پس $AD = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}$ و $DB = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}$ پس مسئله راجع میشود بترسیم ریشه های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2 - ax + b^2 = 0$

۲۲۶ — مسئله ۹ — دو خط رسم کنید در صورتیکه تفاضلشان و واسطهٔ هندسیشان معلوم باشند.

فرض میکنیم $AB = a$ تفاضل و $AC = b$ واسطهٔ هندسی دو خط مطلوب باشند دایرهٔ بقطر AB رسم میکنیم و از نقطهٔ A عمود AC را بطول b بر AB اخراج میکنیم و از نقطهٔ C بمرکز O

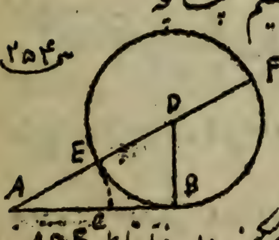


شکل ۲۵۳

وصل میکنیم این خط دایره را در دو نقطهٔ D و E قطع میکند گوئیم CD و CE عبارتند از دو خط مطلوب زیرا که $CE \times CD = \overline{AC}^2 = b^2$ و $CE - CD = DE = AB = a$ و این مسئله همواره ممکن است و باز هم میتوان طولهای CE و CD را بحسب a و b حساب نمود ازینقرار $OD = \frac{a}{2}$ و چون $CE = OC + OD$ و $CD = OC - OD$ و پس $OC = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{AC}^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}$ و $CE = \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2} + \frac{a}{2}$ و $CD = \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2} - \frac{a}{2}$

پس مسئله راجع میشود بترسیم ریشه های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2 - ax - b^2 = 0$

۳۴۷ – مسئلهٔ ۱ – میخواهیم خطی را بنسبت ذات وسط و طرفین قسمت کنیم یعنی بدو جزء چنانچه جزء اعظم واسطهٔ هندسی باشد مابین تمام خط و جزء اصغر خط $\overline{AB}$ مفروض است و میخواهیم نقطهٔ مثل C بر خط AB معلوم کنیم چنانچه



شکل ۲۵۴

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB} \quad \text{و} \quad \overline{AC}^2 = AB \times CB$$

وجه اول – از نقطهٔ B عمود $BD = \frac{AB}{2}$ را اخراج میکنیم و از مرکز D بشعاع DB دایرهٔ رسم میکنیم و بعد خط قاطع ADF را رسم میکنیم تا دایره را بر دو نقطهٔ E و F قطع کند و بالاخره طول $AE = AC$ را بر AB نقل میکنیم پس نقطهٔ C همان نقطهٔ مطلوبه است زیرا که نظر بخط مماس AB

و قاطع AF این تناسب نتیجه میشود $\frac{AF}{AB}=\frac{AB}{AE}$ یا $\frac{AF-AB}{AB}=\frac{AB-AE}{AE}$

و چون $AF-AB=AC$ و $AB-AE=CB$ پس $\frac{AC}{AB}=\frac{CB}{AE}$ یا $\frac{AC}{AB}=\frac{CB}{AC}$

و یا $\overline{AC}^2 = AB \times CB$

وجه دوم — فرض بکنیم مسئله حل شده و C نقطه مطلوبه باشد پس بنا بفرض چنین خواهیم داشت

$\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{BC}$ و چون جمل این تناسب را ترکیب کنیم چنین میشود

$\frac{AB}{AB+AC}=\frac{AC}{AC+CB}$ یا $\frac{AB}{AB+AC}=\frac{AC}{AB}$ و از آنجا

$\overline{AB}^2=(AB+AC)AC$ پس از روی این تساوی معلوم میشود که خط AB

واسطه هندسی است مابین دو خط AC و AB + AC و تفاضل این دو خط نیز AB است

پس طول آنها را میتوان بدستور مسئله سابق معلوم کرد بدین طریق که بر نقطه B دایره بقطر

AB مرور دهیم که مماس بر AB باشد و قاطع AF را رسم کنیم که از مرکز دایره بگذرد پس خط

AE همان خط مطلوب است که چون بر AB نقل کنیم به AC مؤدی میشود

تبصره — چون طول AB را به a بنامیم از مثلث قائم الزاویه ABD چنین حاصل میشود

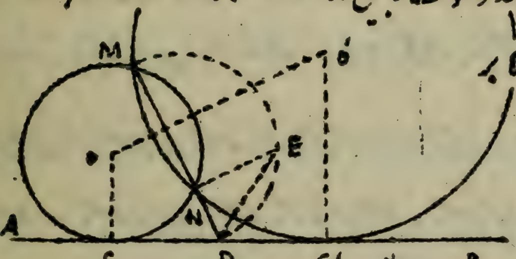
$\overline{AD}^2=\overline{AB}^2+\overline{BD}^2=a^2+\frac{a^2}{4}=\frac{5a^2}{4}$ و از آنجا $AD=\frac{a\sqrt{5}}{2}$

پس طول قطعه اعظم AC چنین میشود $AC=AE=AD-DE=\frac{a\sqrt{5}}{2}-\frac{a}{1}=\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)$

و از آنجا طول BC نیز بدست میآید $BC=AB-AC=a-\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)=\frac{a}{2}(3-\sqrt{5})$

(برای راه حل دیگر این مسئله و تعمیم آن رجوع کنید بجبر و مقابله)

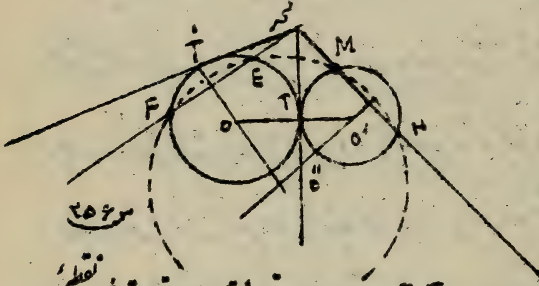
۳۴۸ — مسئله ۱۱ — میخواهیم دایره رسم کنیم که مرور کند بر دو نقطه و مماس شود با خط مفروضی خط AB و دو نقطه M و N مفروضند و فرض میکنیم مسئله حل شده و O مرکز دایره مطلوب باشد که در نقطه C بر AB مماس شده این MN را امتداد میدهیم تا AB را در نقطه D تلاقی کند و از سابق میدانیم که مماس CD واسطه هندسی است مابین تمام قاطع MD و جزء خارجی ND پس راه حل مسئله بدست آید که MN را امتداد دهیم تا خط AB را در D قطع کند و آنوقت مابین دو خط MD و ND واسطه هندسی معلوم کنیم و آنرا از طرفین D بر AB نقل کنیم تا دو نقطه تماس C و C' بدست آیند و بعد دو دایره O و O' رسم کنیم که هر دو مرور کنند بر دو نقطه M و N و مماس شوند بر AB یکی در C و دیگری در C' کلیة مسئله دارای دو جواب است و اگر دو نقطه مفروضه در طرفین AB باشند مسئله ممکن نیست و اگر یکی از دو نقطه واقع شود بر AB آنوقت مسئله دارای یک جواب خواهد بود و اگر MN موازی با AB باشد باز یک جواب بدست میآید



ش ۲۵۵

۳۴۹ — مسئله ۱۲ — میخواهیم دایره بر دو نقطه مفروضه مرور دهیم که مماس شود بر دایره

مفروضه دایرهٔ O و دو نقطهٔ M و N مفروضند شکل ۲۵۶ و فرض میکنیم مسئله حل شده O' مرکز دایرهٔ مطلوب باشد مرکز این دایره واقع میشود بر عمود وسط وتر MN و بر امتداد شعاع OT واصل بر نقطهٔ تماس پس اگر مماس مشترک ثهT را امتداد دهیم تا امتداد MN را در نقطهٔ ثه تلاقی کند این تساوی نتیجه میشود $\overline{\text{ثه}T}^2 = \text{ثه}N \times \text{ثه}M$ و چون قاطع ثهEF را بر دایرهٔ مفروضه رسم کنیم باز چنین حاصل میشود $\text{ثه}E \times \text{ثه}F = \overline{\text{ثه}T}^2$ پس $\text{ثه}M \times \text{ثه}N = \text{ثه}E \times \text{ثه}F$ بنابراین چهار نقطهٔ M و N و E و F واقع شوند بر محیط یک دایره و بعد هر دایره که بر سه نقطهٔ M و N و E مرور کند بر نقطهٔ F نیز خواهد گذشت یعنی دایرهٔ مفروضهٔ O را در نقطهٔ دیگر F نیز قطع کند چنانچه خط EF



شکل ۲۵۶

مرور کند بر نقطهٔ ثه پس از اینجا حل مسئله بدست آمد که دایرهٔ M و N مرور دهیم تا دایرهٔ مفروضه O را در دو نقطهٔ E و F قطع کند و بعد دو وتر MN و FE را امتداد دهیم تا در نقطهٔ ثه متلاقی شوند و از نقطهٔ ثه خط ثهT را بر دایرهٔ مفروضه مماس کنیم تا نقطهٔ تماس بدست آید پس هر دایرهٔ O' مار بر سه نقطهٔ M و N و T عبارتست از دایرهٔ مطلوبه که در نقطهٔ T مماس شود بر دایرهٔ مفروضهٔ O و بسهولت ملتفت شویم که این مسئله دارای دو جواب است زیرا که

از نقطه محیط حیوان دو خط بر دایره O مماس نموده و مرکز دایره ثانی O است

امثله متعلقه بمقاله سوم

قضایا و مسائل

۱ـ برخط AB دو نقطه M و N چنان اختیار میکنیم که $\frac{MA}{MB} = \frac{PA}{PB}$ و در میکنیم O وسط MP باشد ثابت کنید که OM واسطه هندسی است ما بین OA و OB

۲ـ در هر ذوذنقه خط واصل ما بین منتصف دو ضلع غیر متوازی مرور کند برا وساط دو قطر و نقطه از این خط محصور ما بین دو قطر مساویست با نصف تفاضل قاعدتین ذوذنقه

۳ـ چون از سه رأس مثلث و از نقطه تلاقی میانه های آنها چهار عمود بر خط واقع در خارج مثلث رسم کنیم ثابت کنید که عمود چهارم مساویست با ثلث مجموع سه عمود دیگر

۴ـ از نقطه ثابته واقعه بر صفحه دایره بر جمیع نقاط محیط دایره وصل کنیم خطوط واصله را بر یک نسبت قسمت کنیم معلوم کنید مکان هندسی نقاط تقسیم را

۵ـ در هر مثلث قائم الزاویه عکس مربع عمود وارد از رأس زاویه قائمه وتر مساویست با مجموع عکسهای دو مربع دو ضلع محیط بر زاویه قائمه

۶ـ وقتیکه دو دایره متماس خارج باشند قطعه از مماس مشترک خارج محصور ما بین دو نقطه تماس واسطه هندسی است ما بین دو قطر دو دایره

۷ـ چهار ضلع ذوذنقه در دست است ارتفاع آنرا معلوم کنید

۸ ـ نقطهٔ در درون مثلث پیدا کنید که مجموع مربعات فواصلش از سه رأس مثلث دارای کوچکترین مقدار ممکنه باشد

۹ ـ معلوم کنید مکان هندسی نقاطی که مجموع مربعات فواصلشان از سه رأس مثلث ثابت باشد

۱۰ـ از نقطهٔ واقعه در خارج دایره خطی قاطع چنان رسم کنید که وتر حادث واسطهٔ هندسی باشد مابین تمام قاطع و جزء خارجی آن

۱۱ـ مثلثی رسم کنید که طول دو ضلع AB و AC و همچنین طول AD خط منصف زاویهٔ A معلوم باشند

۱۲ ـ دایرهٔ رسم کنید که مرورکند بر نقطه مفروضه و مماس شود بر دو خط مفروض

۱۳ ـ معلوم کنید مکان هندسی نقاطی که از آنجا میتوان دو مماس متساوی برد بر دایرهٔ مفروضه رسم نمود

۱۴ـ چه رابطهٔ باید بین اضلاع ذوذنقهٔ متساوی الساقین موجود باشد چنانچه اگر اوساط آن اضلاع را بهم وصل کنیم شکل مربع حادث شود .

۱۵ — طول دو ضلع مثلث قائم الزاویه ۱۲ متر و ۲۴ متر است معلوم کنید طول منصف زاویهٔ قائمه را

۱۶ — مجموع مربعات میانه های هر مثلث مساوی است با دو ثلث مجموع مربعات اضلاع

۱۷ — طولهای سه میانهٔ مثلثی در دست است حساب کنید طول سه ضلع مثلث را

۱۸ — بر قطر دایره دو نقطه متساوی البعد از مرکز اختیار میکنیم ثابت کنید که مجموع مربعات فواصل هر نقطه از محیط دایره از آن دو نقطه مقداری است ثابت .

تنبیه — برای مجانست اشکال و تعریف جیب و ظل رجوع کنید بضمیمهٔ آخر کتاب

صحیح

مقاله چهارم

در خواص کثیرالاضلاعهای منتظمه و دایره و مساحت اشکال مسطحه

۱- کثیرالاضلاعهای منتظمه

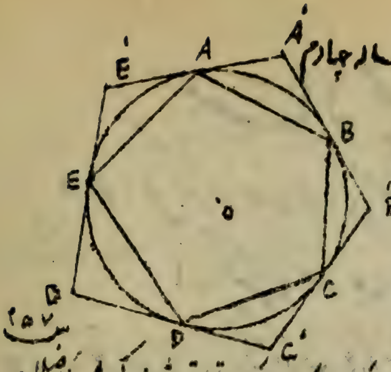
۳۵۰- **تعریف** — هر کثیرالاضلاعی که متساوی الزوایا باشد و هم متساوی الاضلاع آنرا منتظم گوئیم مثلاً مثلث متساوی الاضلاع و مربع از اشکال منتظمه اند کثیرالاضلاع را محاط در دایره گوئیم اگر جمیع رئوسش واقع باشند بر محیط دایره و کثیرالاضلاع محیط بر دایره گوئیم وقتیکه جمیع اضلاعش مماس شوند بر دایره

قضیه ۱

۳۵۱- چون محیط دایره را بر اجزای متساویه قسمت کنیم اولاً از ترکیب اوتار واصله بین نقاط تقسیم متوالی کثیرالاضلاع منتظم محاطی تشکیل میشود ثانیاً خطوطی که از نقاط تقسیم بر دایره مماس شوند کثیرالاضلاع منتظم محیطی تشکیل کنند

فرض میکنیم محیط دایره O مثلاً بر پنج جزء متساوی قسمت شده باشد ش ۲۸۷

اولاً اوتار AB و BC و CD و DE و EA را رسم میکنیم این اوتار متساوی هستند چونکه اوتار قوسهای متساویه اند و علاوه بر این زوایای A و B و C و D و E متساوی



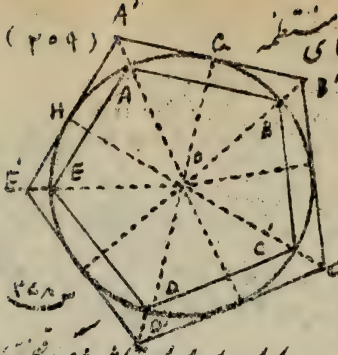
ش ۲۵۷

هستند چونکه محاطند در قوسهای متساویه پس کثیر الاضلاع محاطی $ABCDE$ منتظم است

ثانیاً از نقاط تقسیم A و B و C و D و E خطوطی مماس کنیم بر دایره تا در نقاط A' و B' و C' و D' و E' متلاقی شوند و کثیر الاضلاع محیطی $A'B'C'D'E'$ تشکیل کنند گوئیم منتظم است

برهان — چون مثلثات $AA'B$ و $BB'C$ و $CC'D$ و ... را ملاحظه نمائیم اضلاع AB و BC و CD و ... متساوی هستند بدلیل یا بین زوایای $A'AB$ و $A'BA$ و $B'BC$ و $B'CB$ و ... نیز متساوی باشند چونکه مقیاس هرکدام نصف یکی از قوسهای متساویه AB و BC و ... است پس جمیع این مثلثات متساوی هستند زیرا که دارای دو زاویه و ضلع بینهمای متساویه اند و علاوه بر این متساوی الساقین باشند چونکه زوایای مجاور با ضلاع AB و BC و .... متساویند پس از تساوی این مثلثات زوایای A' و B' و C' و ... متساوی گردند و همچنین $AA' = A'B = BB' = B'C = \dots$ و بعد $A'B' = B'C' = C'D' = \dots$ و بنابراین کثیر الاضلاع محیطی $A'B'C'D'E'$ چون متساوی الزوایا و متساوی الاضلاع است پس منتظم باشد.

۳۵۲ — تبصره ۱ — چون از مرکز O اشعه عمود کشیم بر اضلاع کثیر الاضلاع محاطی



ش ۲۷۸

ABCDE محیط را در اوساط قوسهای AB و BC و CD و ... قطع کنند و بهمان تعداد عدد اجزای متساویه قسمت نمایند پس اگر از آن اوساط خطوطی بدایره مماس بکشیم کثیر الاضلاع محیطی A'B'C'D'E' تشکیل میشود بدلیل قضیهٔ مذکوره منتظمه است و علاوه بر این اضلاعش بموازات اضلاع کثیر الاضلاع محاطی ABCDE است زیراکه مثلاً دو ضلع AB و A'B' چون عمودند بر OG پس متوازی باشند

و رئوس متناظرهٔ این دو کثیر الاضلاع مثلاً A و A' بر استقامت یک شعاع واقعند یعنی خط OA' مرور کند بر A زیراکه دو مثلث قائم الزاویهٔ A'OG و A'OH در وتر مشترکند و ضلع OG = OH پس متساوی باشند در زاویه A'OG = A'OH و بنابراین OA' منصف زاویهٔ GOH مرور کند بر نقطهٔ A از وسط قوس GH و بهمین وجه ثابت میکنیم که شعاع OB' مرور کند بر B و هکذا

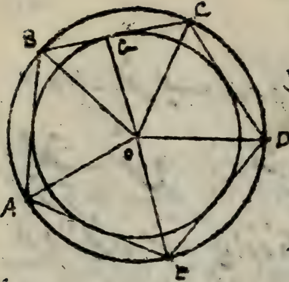
و باید دانست که از روی کثیر الاضلاع منتظم محاطی ABCDE میتوان ثابت کرد که کثیر الاضلاع محیطی A'B'C'D'E' منتظم است زیراکه اولاً زوایای کثیر الاضلاع محیطی مرتباً مساویند با زوایای متساویهٔ کثیر الاضلاع محاطی چونکه اضلاعشان متوازی هستند پس زوایای کثیر الاضلاع محیطی نیز متساوی میگردند ثانیاً از تشابه دو مثلث OAB و OA'B' چنین نتیجه میشود $\frac{OB'}{OB}=\frac{A'B'}{AB}$ و نظر بتشابه دو مثلث OBC و OB'C' چنین میشود $\frac{OB'}{OB}=\frac{B'C'}{BC}$ پس $\frac{B'C'}{BC}=\frac{A'B'}{AB}$ ولی $AB=BC$

پس $B'C' = A'B'$ و بهمین دلیل $C'D' = B'C'$ و هکذا جمیع اضلاع کثیرالاضلاع محیطی $A'B'C'D'E'$ متساوی‌اند پس این کثیرالاضلاع منتظم باشد و مشابه کثیرالاضلاع محاطی ABCDE و بالعکس اما اگر کثیرالاضلاع محیطی $A'B'C'D'E'$ مفروض باشد و بخواهیم از روی آن کثیرالاضلاع محاطی رسم کنیم کافیست که رئوس A' و B' و C' و ... را بمرکز وصل کنیم این خطوط محیط را بر نقاط A و B و C و ... قطع کنند و بهمان قدر عدد اجزای متساویه قسمت نمایند و چون مابین نهایات با وتار AB و BC و CD و ... وصل کنیم کثیرالاضلاع منتظم محاطی ABCDE تشکیل میشود

۳۵۳ — تبصرهٔ ۲ — چون قوس دایره را بر اجزای متساویه قسمت کنیم اولاً از ترکیب اوتار واصله مابین نقاط تقسیم متوالی قطعهٔ کثیرالاضلاع منتظم محاطی تشکیل میشود ثانیاً خطوطیکه از نقاط تقسیم بدایره مماس شوند قطعهٔ کثیرالاضلاع منتظم محیطی تشکیل کنند و این دو قطعهٔ کثیرالاضلاع منتظم محاطی و محیطی دارای خواص اصلیهٔ کثیرالاضلاعهای منتظمه باشند ولی بهیچ کثیرالاضلاع منتظمهٔ مخصوصی متعلق نباشند جز آنوقت که قوس موتر بیکی از اضلاعش حصهٔ صحیحی باشد از تمام محیط دایره

قضیهٔ ۲ (عکس قضیهٔ ۱)

۳۵۴ — کثیرالاضلاع منتظم را میتوان در دایره محاط کرد و نیز بر دایره محیط نمود .



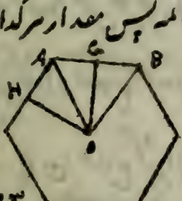
۲۸۹ کثیرالاضلاع منتظم ABCDE مفروض است

اولاً بر سه راس A و B و C یک دایره مرور میدهیم که مرکزش O باشد و گوئیم این دایره بر راس D نیز خواهد گذشت

برهان ـ از مرکز O خط OG را بر BC عمود میکنیم و OA و OD را وصل میکنیم و بعد ذو اربعة اضلاع OGBA را در حول OG دوران دهیم و منطبق کنیم بر ذو اربعة اضلاع OGCD چون دو زاویهٔ G قائمه اند پس ضلع GB واقع شود بر مساوی خود GC و نقطه B بر C و چون زاویه B مساویست بزاویه C بنا بتعریف کثیرالاضلاع منتظم پس ضلع AB واقع شود بر استقامت CD و چون AB = DC پس نقطه A واقع شود بر نقطه D و دو ذو اربعة اضلاع برهم منطبق میشوند و OD = OA و بنابراین دایرهٔ مارّه بر A و B و C بر D نیز خواهد گذشت و بهمین طریق ثابت میکنیم که دایرهٔ O بر جمیع رئوس کثیرالاضلاع مرور کند پس کثیرالاضلاع منتظم مفروض محاط شود در دایره

ثانیاً ـ چون اضلاع کثیرالاضلاع ABCDE نسبت بدایرهٔ او تار متساویه اند بیک بعد باشند از مرکز دایره یعنی عمودهای مانند OG وارده از مرکز O بر این اوتار متساوی میگردند پس اگر از مرکز O و بشعاع OG دایرهٔ رسم کنیم این دایره هر کدام از اضلاع را در نقطهٔ وسط تماس کند و محاط شود در کثیرالاضلاع یا آنکه کثیرالاضلاع مفروض محیط شود بر آن دایره

۲۵۵ - تعریف - مرکز کثیرالاضلاع منتظم عبارتست از مرکز مشترک دو دایرهٔ محاطیه و محیطیه - شعاع کثیرالاضلاع منتظم عبارتست از شعاع دایرهٔ محیطیه یعنی خط واصل از مرکز کثیرالاضلاع بیکی از رؤس - ارتفاع کثیرالاضلاع منتظم عبارتست از شعاع دایرهٔ محاطیه یعنی عمود وارد از مرکز کثیرالاضلاع بیکی از اضلاع — زاویهٔ مرکزیه هر کثیرالاضلاع منتظم عبارتست از زاویهٔ حادثه مابین دو شعاع متوالیه یا دو ارتفاع متوالیه و جمیع زوایای مرکزیه کثیرالاضلاع منتظم متساوی باشند چونکه مقابلند بقوسهای متساویه و مجموعشان چهار قائمه است و مقدار هر کدام از این زوایا میشود که چهار قائمه را قسمت کنیم بر عدد اضلاع کثیرالاضلاع مثلاً اگر عدد اضلاع را n فرض کنیم مقدار یک زاویهٔ مرکزی چنین میشود $\frac{4}{n}$ قائمه یا $\frac{360°}{n}$ و چون مجموع زوایای داخلی کثیرالاضلاع مساویست با $(2n-4)$ قائمه پس مقدار هر کدام چنین میشود

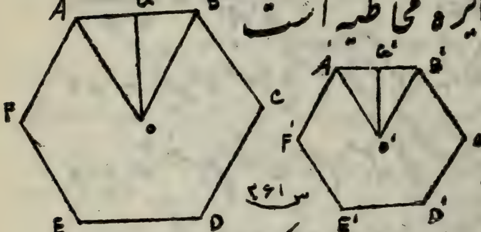


شکل ۲۶

$\frac{2n-4}{n}$ قائمه یا $2-\frac{4}{n}$ قائمه پس معلوم میشود که زاویهٔ داخلهٔ کثیرالاضلاع منتظم مکمل زاویهٔ مرکزیه است چنانچه از روی شکل نیز ظاهر است مثلاً زاویهٔ مرکزیه GOH حادثه مابین دو ارتفاع متوالی مفروض است و در ذوارب اضلاع AGOH چون دو زاویهٔ H و G قائمه اند پس مجموع دو زاویهٔ دیگر A و O نیز دو قائمه است یعنی زاویهٔ داخلهٔ A مکمل زاویهٔ مرکزیه GOH است

قضیّه ۳

۳-۵۶ هردو کثیر الاضلاع منتظمه که دارای یک عدهٔ اضلاع باشند متشابهند و محیطشان بر نسبت دو شعاع دو دایره محیطیه است و نیز بر نسبت دو شعاع دو دایره محاطیه است



اولاً فرض میکنیم دو کثیر الاضلاع منتظم O و O' (س ۲۶۱) هردو دارای n عدهٔ اضلاع باشند و چون مقدار هرکدام از زوایای این دو کثیر الاضلاع متساویست با $\frac{2n-4}{n}$ قائمه پس جمیع زوایای این دو کثیر الاضلاع متساویند و علاوه براین چون اضلاع هرکدام ازاین دو شکل متساوی هستند پس $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\ldots$ و بنابراین دو کثیر الاضلاع زوایاشان متساوی شد و اضلاعشان متناسب پس متشابهند

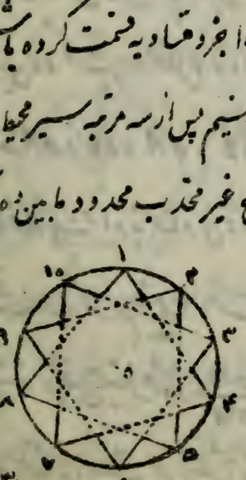
ثانیاً اشعهٔ OA و OB و O'A' و O'B' و دو ارتفاع OG و O'G' را رسم میکنیم در دو مثلث AOB و A'O'B' یک زاویهٔ مساوی و دو ضلع طرفین متناسبند یعنی زاویهٔ $\hat{O}=\hat{O'}$ چونکه مقدار هرکدام $\frac{4ق}{n}$ است و علاوه براین $\frac{OA}{O'A'}=\frac{OB}{O'B'}$ پس باید دو مثلث متشابه باشند و چنین نتیجه میشود $\frac{AB}{A'B'}=\frac{OA}{O'A'}$ ولی چون دو کثیر الاضلاع مفروض متشابه هستند پس محیطشان P و P' بر نسبت اضلاع متناظره است

یعنی $\frac{AB}{A'B'} = \frac{P}{P'}$ پس $\frac{OA}{O'A'} = \frac{P}{P'}$

و از طرف دیگر در دو مثلث قائم الزاویه AOG و $A'O'G'$ زاویه $AOG = A'O'G'$ چونکه انصاف دو زاویه متساویه اند پس این دو مثلث متشابه باشند و چنین حاصل میشود

$\frac{OG}{O'G'} = \frac{OA}{O'A'}$ و بعد بالاخره $\frac{OG}{O'G'} = \frac{OA}{O'A'} = \frac{P}{P'}$ فهو المطلوب

۲۵۶ ـ کثیر الاضلاع منتظم کوکبی ـ چون محیط دایره را به اجزای متساویه قسمت کنیم و ما بین نقاط تقسیم متوالی را بهم وصل کنیم کثیر الاضلاع منتظم محدب تشکیل میشود واما اگر ما بین نقاط تقسیم را ۲ به ۲ و ۲ به ۳ و ... وغیره بهم وصل کنیم ممکن است پس از چند مرتبه سیر محیط به نقطه مبداء باز رسیده و در اینصورت کثیر الاضلاع منتظم غیر محدبی تشکیل میشود که جمیع اضلاعش متساوی باشند و همچنین جمیع زوایایش و آنرا از حیث شکل کثیر الاضلاع منتظم کوکبی گوئیم مثلاً فرض میکنیم محیط دایره را به ۱۰ جزو متساویه قسمت کرده باشیم و چون ابتدا از نقطه (۱) نقاط تقسیم را ۳ به ۳ بهم وصل کنیم پس از سه مرتبه سیر محیط در نتیجه ده وتر متوالی به نقطه مبداء (۱) رسیم و کثیر الاضلاع غیر محدب محدود ما بین ده وتر را معشر کوکبی گوئیم و در حساب ثابت شده است که اولاً چون محیط دایره را به m جزء متساوی قسمت کنیم و نقاط تقسیم را متدرجاً به m

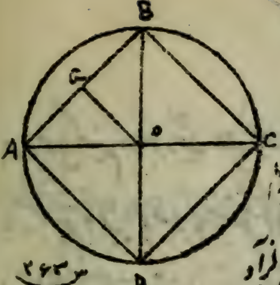


هم وصل کنیم در صورتیکه m نسبت به n اول باشد پس از m مرتبه سیر محیط بر نقطه مبدأ
باز رسیم و کثیر الاضلاع منتظم کوکبی n ضلع تشکیل میشود مثلاً اگر محیط را به ۱۵ جسم متساویه
قسمت کنیم و نقاط تقسیم را ۲ به ۲ وصل کنیم پانزده ضلعی کوکبی تشکیل میگردد چونکه ۲ و ۱۵
نسبت بهم اول‌اند و اگر نقاط تقسیم را ۴ به ۴ و ۷ به ۷ وصل کنیم باز دو قسم پانزده
ضلعی منتظم کوکبی تشکیل میگردد زیرا که ۴ و ۷ نسبت به ۱۵ اول‌اند

ثانیاً مقدار کثیر الاضلاعهای منتظمه کوکبی n ضلعی برابر است با عده اعدادی
که نسبت به n اول باشند و از $\frac{n}{2}$ کوچکتر مثلاً اگر محیط را بر ۲۴ جسم متساوی قسمت
کنیم اعدادی که نسبت به ۲۴ اول باشند و از ۱۲ کوچکتر عبارتند از ۱ و ۵ و ۷ و ۱۱
پس علاوه بر ۲۴ ضلعی منتظم محدب میتوان سه قسم ۲۴ ضلعی منتظم کوکبی تشکیل داد
بوصل کردن نقاط تقسیم را به ۵ و ۷ به ۷ و ۱۱ به ۱۱ پس از آنچه مذکور شد معلوم
میشود که نمیتوان کثیر الاضلاع کوکبی ۳ ضلعی و ۴ ضلعی و ۶ ضلعی تشکیل داد و این
نکته را نیز ملتفت شویم که اگر m و n دارای بزرگترین مقسوم علیه مشترک d باشند
پس از درج $\frac{n}{d}$ اضلاع بنقطه مبدا باز رسیم و کثیر الاضلاع $\frac{n}{d}$ ضلعی تشکیل میگردد

۲۵۸ - مسئله - میخواهیم در دایره مربع محاط کنیم

در دایره مفروضه O ش ۲۶۳ دو قطر AC و BD را بیکدیگر عمود میکنیم و اطراف آنها را

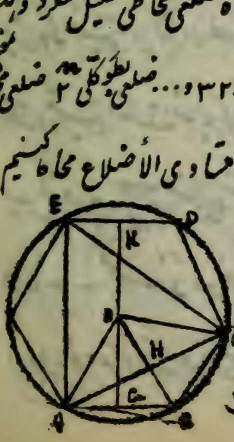

س ۲۶۳

بهم وصل میکنیم پس ذوارتعه اضلاع ABCD شکل مربع است زیرا که چهار ضلعش اوتار متساوی باشند و چهار زاویه اش نیز قائمه اند چون شعاع دایره را R فرض کنیم از مثلث قائم الزاویه AOB چنین حاصل میشود $\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = 2R^2$ پس طول ضلع مربع محاطی بحسب شعاع چنین میشود $AB = R\sqrt{2}$ و یا اگر AB را به C_4 بنمایم چنین $C_4 = R\sqrt{2}$ و یا $C_4 = R \times 1{,}4142...$ را و همچنین طول OG ارتفاع مربع نیز چنین بدست میآید $OG = \frac{AB}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ و یا اگر OG را به a_4 بنمایم چنین میشود

$$a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2} = R \times 0{,}7071...$$

تبصره — چون هر یک از قوسهای موتر باضلاع مربع محاطی را بدو جزء متساویه قسمت کنیم محیط دایره ۸ جزء متساوی منقسم میشود پس اگر ما بین نقاط تقسیم متوالی را بهم وصل کنیم ثمن منتظم محاطی تشکیل میشود و همینطور از روی ثمن منتظم محاطی شانزده ضلعی محاطی تشکیل میگردد و همچنین پس بعد پرکار متساره میتوان در دایره اشکال کثیر الاضلاع منتظمه ۴ و ۸ و ۱۶ و ۳۲ و ... ضلعی بطور کلی 2^n ضلعی محاطی نمود

۲۵۹ — مسئله — میخواهیم در دایره مسدس و مثلث متساوی الاضلاع محاط کنیم


س ۲۶۴

اولاً فرض میکنیم مسئله حل شده و AB ضلع مسدس محاطی باشد س ۲۶۴ و دو شعاع OA و OB را

وصل میکنیم مقدار زاویهٔ AOB مساوی است با $60° = \frac{360°}{6}$ پس مجموع دو زاویه دیگر مثلث AOB چنین میشود $120° = 60° - 180°$ و چون مثلث AOB متساوی الساقین است مقدار هر کدام از دو زاویهٔ A و B میشود $60° = \frac{120°}{2}$ پس مثلث AOB متساوی الاضلاع نیز هست و AB ضلع مسدس محاطی مساوی است با شعاع دایره و بنابراین هرگاه بخواهیم در دایره مسدس محاط کنیم شعاع دایره را بمدد پرگار شش مرتبه بر محیط نقل میکنیم

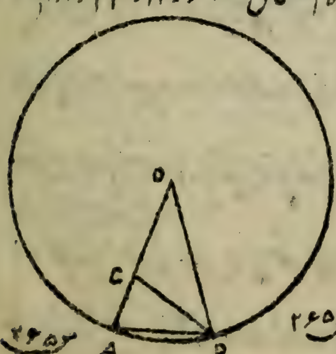
ثانیاً چون رئوس مسدس را دو بدو وصل کنیم مثلث متساوی الاضلاع محاطی ACE بدست میآید زیرا که اضلاعش اوتار قوسهای متساویه باشند و زوایایش نیز متساوی هستند چونکه مقیاسشان نصف قوسهای متساویه است

و اما ذو اربعة اضلاع ABCO چون چهار ضلعش متساوی است شکل لوزی باشد و دو قطرش AC و OB هم عمودند بر یکدیگر و هم منصف یکدیگر پس از اینجا وسیلهٔ دیگری برای محاط کردن مثلث متساوی الاضلاع در دایره بدست میآید که شعاع OB را رسم کنیم و وتر AC را بر وسط آن عمود کنیم دو نقطه A و C دو راس مثلث محاطی باشند و راس سوم نقطه E مقاطر نقطه B است

۳۶۰ — تبصرهٔ ۱ — چون قطر BE را وصل کنیم از مثلث قائم الزاویه ABE چنین نتیجه میشود $\overline{AE}^2 = \overline{EB}^2 - \overline{AB}^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2$ پس از اینجا طول

AE ضلع مثلث متساوی الاضلاع بحسب شعاع چنین شود $AE = R\sqrt{3}$
یا $C_3 = R\times\sqrt{3}$ یا $C_3 = R\times 1{,}732000\ldots$ و طول OH ارتفاع
مثلث متساوی الاضلاع ACE مساویست با نصف شعاع OB یعنی $OH = \frac{R}{2}$
$\left(a_3 = \frac{R}{2}\right)$ و OG ارتفاع مسدس مساویست با نصف GK یا AE یعنی
$OG = \frac{GK}{2} = \frac{AE}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ و یا $a_6 = R\times 0{,}866\ldots$ و این طول را
بسبب مثلث قائم الزاویه AGO نیز میتوان بدست آورد زیراکه
$\overline{OG}^2 = \overline{AO}^2 - \overline{AG}^2$ یا $\overline{OG}^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3R^2}{4}$ و از آنجا $OG = a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

۳۶۱- تبصرهٔ ۲ — چون هریک از قوسهای موتر با ضلاع مسدس محاطی را بر دو جزء متساوی قسمت کنیم محیط دایره بر ۱۲ جزء متساویه قسمت میشود و بعد نقاط تقسیم متوالی را بهم وصل کنیم دوازده ضلعی منتظم تشکیل میشود و از شکل ۱۲ ضلعی ۲۴ ضلعی تشکیل میگردد و هکذا پس بعد پرکار و ستاره میتوان در دایره اشکال منتظمه ۶ و ۱۲ و ۲۴ و ۴۸ ... ضلعی و بطور کلی 3×2^{n} ضلعی محاط نمود



ش ۲۶۵

۳۶۲- مسئله — میخواهیم در دایره معشر محاطی کنیم فرض میکنیم مسئله حل شده و AB ضلع معشر محاطی باشد و دو شعاع OA و OB را وصل کنیم ش ۲۶۵

زاویهٔ O مساویست با $\frac{360°}{10} = 36°$ پس مجموع دو زاویهٔ A و B مساویست با
$180° - 36° = 144°$ و بنابراین مقدار هرکدام $72°$ باشد یعنی مضاعف
زاویهٔ O .

(یا این وجه نیز میتوان گفت که زاویهٔ O مساویست با $\frac{4}{10}$ یا $\frac{2}{5}$ قائمه
پس مجموع دو زاویهٔ A و B مساویست با $2 - \frac{2}{5} = \frac{8}{5}$ قائمه و بنابراین
مقدار هرکدام $\frac{4}{5}$ قائمه باشد یعنی مضاعف زاویهٔ O)

و حال خط BC منصف زاویهٔ B را رسم میکنیم $\widehat{OBC}$ نصف زاویهٔ B مساویست
با زاویهٔ O پس مثلث OCB متساوی الساقین است و $OC = BC$ و اما در مثلث OCB
زاویهٔ خارجه ACB مساویست با مجموع دو زاویهٔ داخله A و O یا دو برابر زاویهٔ O
و بنابراین مساویست با زاویهٔ A پس مثلث ACB متساوی الساقین است و $AB = CB = OC$
یعنی ضلع معشر مساویست با OC و در مثلث AOB منصف الزاویهٔ BC قسمت کند ضلع
OA را بنسبت دو ضلع دیگر پس $\frac{OC}{AC} = \frac{OB}{AB}$ و چون بجای OB مساویش OA
و بجای AB مساویش OC را قرار دهیم چنین شود $\frac{OC}{AC} = \frac{OA}{OC}$ پس معلوم شد
که OC یا ضلع معشر جزء اعظم شعاع OA است که بنسبت ذات وسط و طرفین
قسمت شده و بنابراین کافیست که شعاع دایره را بنسبت ذات وسط و طرفین

نسبت کنیم (نمره ۳۴۷) و نقره اعظم آنرا که ضلع معشر است بپرکار و بدستگاه ۱۰ مرتبه برمحیط نقل کنیم معشر محاطی تشکیل شود و چون شعاع دایره را R وضلع معشر را c_{10} یا x فرض کنیم تناسب مذکور بنیصورت نوشته میشود $\frac{x}{R-x}=\frac{R}{x}$ وازآنجا $c_{10}=\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$

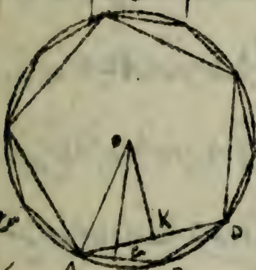
یا $c_{10}=\frac{R}{4}\sqrt{6-2\sqrt{5}}$ ویا $c_{10}=R\times 0,618...$ وطول OH

ارتفاع معشر (بشکل ۲۶۹) نیز از مثلث قائم الزاویه AHO بدست میآید زیراکه

$\overline{OH}^2=\overline{OA}^2-\overline{AH}^2$ ویا $\overline{OH}^2=R^2-\frac{R^2(\sqrt{5}-1)^2}{16}=\frac{R^2(10+2\sqrt{5})}{16}$

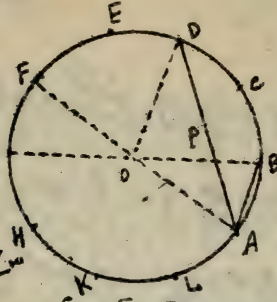
وازآنجا $OH=a_{10}=\frac{R}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}=R\times 0,951...$

۳۶۳- تبصرهٔ ۱- چون رئوس معشر محاطی را دو بدو بهم وصل کنیم مخمس منتظم محاطی تشکیل میگردد و اگر هریک از قوسهای موتر باضلاع معشر محاطی را بدو جزء متساوی قسمت کنیم دایره به ۲۰ جزء متساوی قسمت میشود و چون مابین نقاط تقسیم متوالی را بهم وصل کنیم کثیرالاضلاع ۲۰ ضلعی منتظم تشکیل میگردد و همینطور از کثیرالاضلاع ۲۰ ضلعی کثیرالاضلاع منتظم ۴۰ ضلعی تشکیل میشود و بکذا و بنابراین بمدد پرکار و ستاره میتوان در دایره اشکال منتظمه ۵ و ۱۰ و ۲۰ و ۴۰ و ... ضلعی و بطور کلی کثیرالاضلاع 5×2^n ضلعی محاط نمود



شکل ۲۶۹

۳۶۴- تبصرهٔ ۲- چون تنها اعدادی که نسبت به ۱۰ اول و کوچکتر از ۵ باشند



ش ۲۶۷

منحصر است. ۱۰۳ پس دو قسم معشر در دایره میتوان
محاط نمود یکی معشر محدب که هر ضلعش $\frac{1}{10}$ محیط
باشد و دیگری معشر کوکبی که هر ضلعش $\frac{3}{10}$ محیط

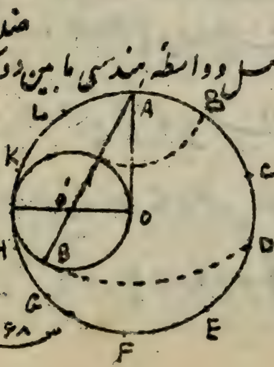
پس فرض کنیم محیط دایره در نقاط A و B و C و D و E و F و G و H و K و ما بده جزء متساویه قسمت شده باشد و دو وتر AB و AD دو ضلع دو معشر مطلوب باشند OA و OB و OD را رسم میکنیم و ملاحظه نمائیم که امتداد OA و OB منتهی گردد بر F و G و دو زاویه AOB و OAP متساوی باشند چونکه مقیاس هرکدام $\frac{1}{10}$ محیط است و همچنین زوایای ABO و APB و OPD و DOP نیز متساوی باشند چونکه مقیاس هرکدام $\frac{2}{10}$ محیط است پس چنین شود $AB = AP = OP$ و $PO = OD$

پس $AD - AB = AD - AP = PD - OD$ یعنی $AD - AB = R$ (۱)

و از طرف دیگر از تشابه دو مثلث متساوی الساقین AOD و AOP چنین حاصل میشود

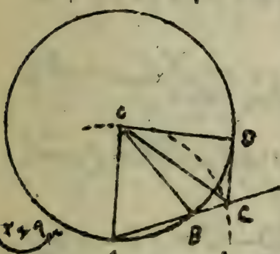
$\frac{AD}{OA} = \frac{OA}{AP}$ و چون $AB = AP$ پس $AD \times AB = \overline{OA}^2 = R^2$ (۲)

پس از تساوی (۱) و (۲) معلوم میشود که تفاضل و واسطه هندسی ما بین دو ضلع دو معشر مساویست بشعاع R و این دو ضلع را بطریق مسئله (نمره ۲۵۸) معلوم میکنیم شعاع OM را



ش ۲۶۸

بر OA عمود میکنیم و بقطر OM دایره O را رسم میکنیم و AO را وصل میکنیم تا دایره را
در دو نقطه P و Q قطع نماید پس AP ضلع معشر محدب و AQ ضلع معشر کوکبی خواهد بود
و باید ملتفت بود که این دو خط عبارتست از دو قطعه اضافی و نقصانی شعاع که
بر نسبت ذات وسط و طرفین قسمت شده باشد برای محاسبه طول آنها کافی است که
AD و AB را ریشه های معادله درجه دوم $x^2 - Rx - R^2 = 0$ فرض کنیم
پس $AB = C_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$ و $AD = C'_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5}+1)$



۲۶۹

۳۰۶۵ - مسئله - میخواهیم در دایره مخمس محاطی رسم کنیم
ضلع مخمس منتظم محاطی عبارتست از وتر مثلث قائم الزاویه
که دو ضلع دیگرش یکی ضلع معشر و دیگری ضلع مسدس
یا شعاع دایره باشد - فرض میکنیم AB ضلع معشر باشد آن را بطول BC امتداد میدهیم
بطوریکه $AC = OA$ و OC را وصل میکنیم و گوئیم این خط ضلع مخمس است زیرا
که زاویه AOB چون مساویست با $\frac{4}{10}$ یا $\frac{2}{5}$ قائمه پس $\hat{A} = \frac{1}{2}(2-\frac{2}{5}) = \frac{4}{5}$ قائمه
پس OC ضلع مخمس محاطی است در دایره که شعاع AC یعنی مساوی دایره مفروضه
باشد و حال از نقطه C مماس CD را رسم میکنیم و گوئیم این خط مساویست با AB
ضلع معشر زیراکه $\overline{CD}^2 = CA \times CB$ و از طرف دیگر چون AC شعاع است و AB ضلع

معشر پس $\overline{AB}^2 = CA \times CB$ پس $CD = AB$ و در مثلث قائم‌الزاویه OCD وتر OC ضلع مخمس است و CD ضلع معشر و OD شعاع دایره یا ضلع مسدس است

۳۶۶- مقدار ضلع مخمس بحسب شعاع از مثلث قائم‌الزاویه OCD بدست میآید زیرا که $\overline{OC}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{CD}^2$ یا

$$\overline{OC}^2 = R^2 + \frac{R^2(\sqrt{5}-1)^2}{4} = \frac{R^2(10-2\sqrt{5})}{4}$$

واز آنجا

$$OC = C_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}} = R \times ۱٫۱۷۵\ldots$$

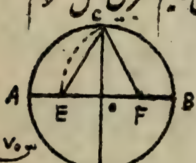
وطول OK ارتفاع مخمس نیز از مثلث قائم‌الزاویه OKA ش ۲۶۴ بدست میاید زیرا که $\overline{OK}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{AK}^2$ ویا

$$\overline{OK}^2 = R^2 - \frac{(10-2\sqrt{5})}{16} = \frac{R^2(\sqrt{5}+1)^2}{16}$$

واز آنجا

$$OK = a_5 = \frac{R}{2}(\sqrt{5}+1) = R \times ۰٫۸۱\ldots$$

۳۶۷- تبصره ۱- اضلاع معشر و مخمس محاطی را میتوان بعمل ترسیم بطریق سهل معلوم نمود در دایره مفروضه O دو قطر AB و CD را بر یکدیگر عمود کنیم و از نقطه F وسط OB بشعاع FC قوس CE را رسم میکنیم وتر CE عبارتست از ضلع مخمس و EO ضلع معشر زیرا



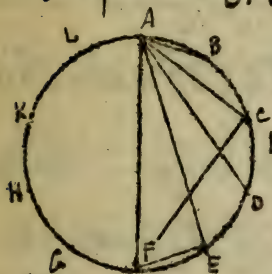
ش ۲۷۵

$$EO = EF - OF = CF - OF = \sqrt{R^2 + \frac{R^2}{4}} - \frac{R}{2} = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$$

وچون EO ضلع معشر است پس EC ضلع مخمس خواهد بود

۳۶۸- تبصره ۲- چون اعداد یکه نسبت به ۵ اول و از $\frac{5}{2}$ کوچکتر باشند منحصراً به ۱ و ۲ است پس دو قسم مخمس محاطی موجود باشد یکی مخمس محدب که هر ضلعش مقابل

$\frac{1}{5}$ یا $\frac{2}{10}$ محیط باشد و دیگری مخمس کوکبی که هر ضلعش مقابل $\frac{2}{5}$ یا $\frac{4}{10}$ محیط باشد پس اگر محیط دایره را بده اجزاء متساویه قسمت کنیم چون این نقاط تقسیم را ۲ به ۲ وصل کنیم مخمس محدب تشکیل شود و ۴ به ۴ وصل کنیم مخمس کوکبی — طول AE ضلع مخمس کوکبی از مثلث قائم الزاویه



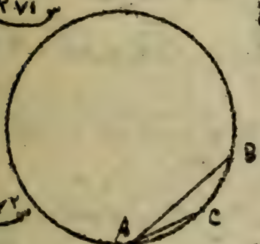
ش ۲۷۱

AEF بدست میاید زیرا که $\overline{AE}^2 = \overline{AF}^2 - \overline{EF}^2$

و چون $AF = 2R$ پس $EF = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)$

پس $AE = \frac{R}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$

۲۶۹ — مسئله — میخواهیم در دایره مفروضه کثیر الاضلاع پانزده ضلعی منتظم محاط کنیم — چون $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$ پس اگر از قوس AB وتر بضلع مسدس قوس AC وتر بضلع معشر را نقصان کنیم وتر CB مقابل بقوس CB ضلع کثیر الاضلاع ۱۵ ضلعی است و بنابراین میتوان اشکال منتظمه ۳۰ و ۶۰ و .... ضلعی و کلیه 15×2^n ضلعی در دایره محاط نمود

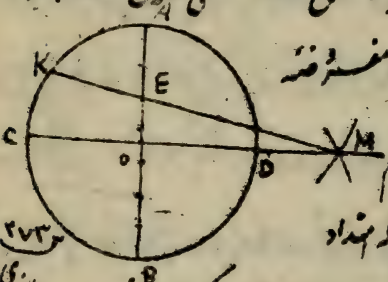


ش ۲۷۲

۲۷۰ — تبصره — باید دانست که محاط کردن هر کثیر الاضلاعی در دایره همواره ممکن نیست مگر بعضی شرایط که در عدد اضلاع موجود باشد و ما در مسائل سابقه دیدیم که بعد پرگار و ستاره میتوان اشکال منتظمه که عدد اضلاعشان بیکی از صور 2^n و 3×2^n و 5×2^n و $3\times5\times2^n$

باشند در دایره محاط نمود اما یکی از علمای ریاضی موسوم به گَوس مبرهن نموده که بتوسط پرگار و مسطره میتوان در دایره محاط نمود هر کثیر الاضلاعی که عدد اضلاعش عدد اول و بصورت $۱+۲^{۲^n}$ باشد و یا حاصل ضرب چند عدد اولی که بآن صورت باشند و متمایز از یکدیگر مثلاً مثلث (۳ = ۱+۲) و مخمس (۱+۴ = ۱+$۲^۲$) و ۱۷ ضلعی (۱+$۲^۴$) و هکذا اما ۹ ضلعی ممکن نیست زیرا که هرچند ۹ قوه‌ایست از ۲ باضافهٔ واحد ولی عدد اول نیست و علاوه بر این عواملش هرچند بصورت $۱+۲^{۲^n}$ باشند ولی متمایز نیستند

و اما قاعده برای محاط کردن هر کثیر الاضلاع ضلعی معمول است بتقریبی که همواره در عملیات کافی باشد. در دایرهٔ مفروضه

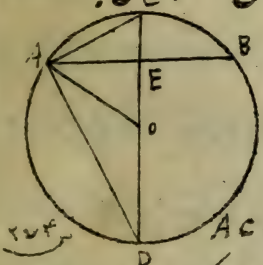


۲۷۳

دو قطر AB و CD را بر یکدیگر عمود میکنیم و از مرکز A بشعاع AB قوسی رسم میکنیم که امتداد قطر CD را در نقطهٔ M قطع کند و بعد قطر AB را بعدد اضلاع کثیر الاضلاع مطلوب باجزای متساویه قسمت کنیم و خط MK را از دومین نقطهٔ تقسیم E میگذرانیم پس قوس AK موتر است بضلع کثیر الاضلاع مطلوب مثلاً در شکل مفروض قوس AK سُبع محیط است پس وتر AK ضلع کثیر الاضلاع هفت ضلعی است که چندان مستعمل نیست

۲۷۱ — مسئله. هرگاه معلوم باشد ضلع کثیر الاضلاع منتظم

محاطی میخواهیم معلوم کنیم ضلع کثیرالاضلاع منتظم محاطی دیگری را
که عدد اضلاعش مضاعف کثیرالاضلاع مفروض باشد



ش ۲۷۴

فرض میکنیم $AB = c_n$ ضلع کثیرالاضلاع n ضلعی محاطی باشد
ش ۲۷۴ قطر CD را عمود میکنیم بر وتر AB نقطهٔ C
وسط قوس AB است و وتر AC را وصل میکنیم پس $AC = c_{2n}$
عبارتست از ضلع کثیرالاضلاع مطلوب و چون وتر را وصل کنیم از مثلث قائم الزاویه
ACD چنین حاصل میشود $\overline{AC}^2 = CD \times CE = 2R(R - OE)$

و چون OA را وصل کنیم از مثلث قائم الزاویه AEO چنین نتیجه میشود

$\overline{OE}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{AE}^2 = R^2 - \frac{\overline{AB}^2}{4}$ و از آنجا $EO = \sqrt{R^2 - \frac{\overline{AB}^2}{4}}$

پس $\overline{AC}^2 = 2R\left(R - \sqrt{R^2 - \frac{\overline{AB}^2}{4}}\right)$ و از آنجا $AC = \sqrt{2R\left(R - \sqrt{R^2 - \frac{\overline{AB}^2}{4}}\right)}$

و بالاخره چون بجای AB و AC مرتباً c_n و c_{2n} را قرار دهیم چنین نتیجه میشود

$$c_{2n} = \sqrt{2R\left(R - \sqrt{R^2 - \frac{c_n^2}{4}}\right)} \quad (1)$$

۲۷۳ – مثال ۱ – ضلع مربع محاطی معلوم است میخواهیم ضلع مثمن را حساب کنیم

چون $c_4 = R\sqrt{2}$ پس از دستور (۱) متدرجاً چنین نتیجه میشود

$$c_8 = \sqrt{2R\left(R - \sqrt{R^2 - \frac{2R^2}{4}}\right)} = \sqrt{2R\left(R - \frac{R\sqrt{2}}{2}\right)}$$

$$C_8 = \sqrt{2R^2 - R^2\sqrt{2}} = R\sqrt{2-\sqrt{2}} = R \times 0{,}765$$

۳۷۳- مثال ۱- ضلع مسدس معلومست میخواهیم ضلع ۱۲ ضلعی را حساب کنیم چون $C_6 = R$ پس از دستور (۱) متدرجاً چنین حاصل میشود

$$C_{12} = \sqrt{2R\left(R - \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}}\right)} = \sqrt{2R\left(R - \frac{R\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$C_{12} = \sqrt{2R^2 - R^2\sqrt{3}} = R\sqrt{2-\sqrt{3}} = R \times 0{,}5176$$

۳۷۴ و بالعکس هرگاه ضلع کثیرالاضلاع محاطی معلوم باشد میتوان ضلع کثیرالاضلاعی محاطی دیگر را که عدد اضلاعش نصف کثیرالاضلاع مفروض باشد معلوم نمود و در این صورت باید دستور (۱) را نسبت به C_n حل نمود که میشود

$$C_n = \frac{C_{2n}}{R}\sqrt{4R^2 - C_{2n}^2} \qquad (۲)$$

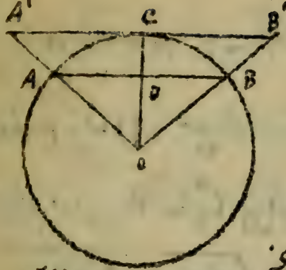
۳۷۵- مثال ۱- ضلع ۱۲ ضلعی معلوم است میخواهیم ضلع مسدس را حساب کنیم چون $C_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$ پس از دستور (۲) متدرجاً چنین حاصل میشود

$$C_6 = \sqrt{2-\sqrt{3}} \times \sqrt{4R^2 - R^2(2-\sqrt{3})} = R$$

۳۷۵- مثال ۲- ضلع معشر معلوم است میخواهیم ضلع مخمس را معلوم کنیم چون $C_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$ پس از دستور (۲) متدرجاً چنین حاصل میشود

$$C_5 = \frac{R(\sqrt{5}-1)}{2R}\sqrt{4R - \sqrt{R^2(6-2\sqrt{5})}} = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

۳۷۶- مسئله- ضلع کثیرالاضلاع منتظم محاطی معلومست میخواهیم ضلع



شکل ۲۷۵

کثیرالاضلاع منتظم محیطی مشابهش را معلوم کنیم

فرض میکنیم AB ضلع کثیرالاضلاع منتظم محاطی باشد شکل ۲۷۵ شعاع OC را بر AB عمود میکنیم و از نقطه C وسط قوس AB خط $A'B'$ را بر دایره مماس میکنیم

پس خط $A'B'$ محصور باین امتداد دو شعاع OA و OB عبارتست از ضلع کثیرالاضلاع منتظم محیطی مشابه کثیرالاضلاع مفروض (نمره) چون دو مثلث $A'OB'$ و $A'OC$ مرتباً با دو مثلث AOB و AOD متشابهند پس تناسب میشود

$$\frac{A'O}{AO}=\frac{OC}{OD}=\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'O}{AO}$$

پس $\frac{OC}{OD}=\frac{A'B'}{AB}$ و یا $\frac{R}{OD}=\frac{C'_n}{C_n}$ و از مثلث قائم الزاویه OAD چنین حاصل میشود

$$OD=\sqrt{\overline{AO}^2-\overline{AD}^2}=\sqrt{R-\frac{C_n^2}{4}}$$

پس $\frac{C'_n}{C_n}=\frac{R}{\sqrt{R^2-\frac{C_n^2}{4}}}$ و از آنجا

$$C'_n=\frac{C_n\times R}{\sqrt{R^2-\frac{C_n^2}{4}}}$$

۳ـ اندازه محیط دایره

۲۲۷ ـ تعریف ـ مقدار تغییرپذیر آنست که بتواند مستدرجاً حالات مختلفه کمیت را پیدا کند

حدّ هر مقدار تغییرپذیر عبارتست از مقدار ثابت که مقدار تغییرپذیر بتواند بنهایت باو نزدیک شود ولی نتواند هیچ وقت باو برسد مثلاً مقدار زاویه کثیرالاضلاع منتظمه

n ضلعی این است $\frac{2n-4}{n}$ و یا $2-\frac{4}{n}$ قائمه چون عدد اضلاع را بنهایت ترقی دهیم عدد n میتواند بزرگتر شود از هر مقدار مفروضی و آنوقت خارج قسمت $\frac{4}{n}$ میل میکند بسمت صفر و ضمناً مقدار زاویه کثیرالاضلاع نیز میل میکند به ۲ قائمه یا ۱۸۰ درجه پس معلوم میشود که زاویه هر کثیرالاضلاع منتظم مقداری است تغییرپذیر و حدش دو قائمه است یعنی میتواند بنهایت بآن نزدیک شود ولی هرگز بآن نرسد

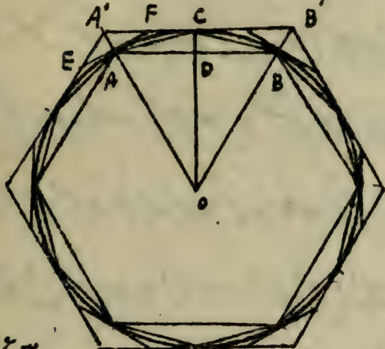
۲۷۸ - طول محیط دایره - چون محیط دایره خط منحنی است نمیتوان آن را بخط مستقیم که واحد طول فرض شده باشد سنجیده اندازه گرفت زیرا که قوس دایره هر قدر کوچکتر فرض شود ممکن نیست بر خط مستقیم منطبق گردد پس لازم است که طول محیط دایره را بدقت توضیح و تعریف کنیم

طول محیط دایره عددی است که بسمتش میل کند محیط کثیرالاضلاع منتظم محاطی یا محیطی که عده اضلاعش را بنهایت مضاعف کنیم

برای اثبات وجود این حد فرض میکنیم در دایره مفروضه دو کثیرالاضلاع منتظمه محاطی و محیطی که بیک عده اضلاع باشند چون عدد اضلاع این دو کثیرالاضلاع را مضاعف کنیم محیط کثیرالاضلاع محاطی جدید بزرگتر میشود از محیط کثیرالاضلاع محاطی اول زیرا که هر ضلع مثل AB مبدل شده است بخط منکسر ACB که اطول است از آن و اما محیطی

کثیر الاضلاع محیطی جدید کوچکتر میشود از محیط کثیر الاضلاع محیطی اول زیرا که هر خط منکسر مثلاً

EA'F بدل شده است بضلع EF که کوچکتر است از آن



ش ۲۷۶

پس اگر بهمین طور عدد اضلاع دو کثیر الاضلاع محاطی و محیطی را بی نهایت مضاعف کنیم محیطهای کثیر الاضلاعهای محاطی رو به ترقی نهند اما هر کدام پست تر باشد از محیط کثیر الاضلاع محیطی پس این محیط ها میل میکنند بسمت قدر معینی یعنی بمقدار ثابتی و هرگز باو نرسند ولی توانند انقدر بآن نزدیکتر شوند که بخواهیم و تفاوت جزئی باو پیدا کنند.

و از طرف دیگر محیطهای کثیر الاضلاعهای محیطی رو بتناقص گذارند اما هر کدام بزرگتر باشد از محیط کثیر الاضلاع محاطی پس این محیط ها نیز میل میکنند بسمت قدر معینی یعنی بمقدار ثابتی و هرگز باو نرسند ولی توانند انقدر بآن نزدیکتر شوند که بخواهیم و تفاوت جزئی باو پیدا کنند

و حال ثابت میکنیم که این دو قدر یکسان هستند زیرا که چون دو کثیر الاضلاع محیطی و محاطی

مفروضه متشابهند محیطشان P و P′ بر نسبت دوار تفاع‌شان OC و OD باشند
یعنی $\frac{OC}{OD}=\frac{P'}{P}$ وازآنجا $\frac{DC}{R}=\frac{OC-OD}{OC}=\frac{P'-P}{P'}$ یا $P'-P=P'\times\frac{DC}{R}$
پس وقتیکه عدد اضلاع دو کثیرالاضلاع را بینهایت مضاعف کنیم R ثابت است
و P′ همواره در تناقص است و CD که کوچکتر است از AC میل میکند بسمت صفر و کم
خود AC نیز میل میکند بسمت صفر پس تفاضل P′-P میل میکند بسمت صفر و بنا براین
دو حد دو محیط P و P′ مساوی میگردند یعنی وقتیکه تفاضل ما بین دو محیط دو کثیرالاضلاع
میل کند بسمت صفر چون طول محیط دایره همواره واقع است ما بین دو محیط دو کثیرالاضلاع
منتظم محیطی و محاطی پس حد مشترک این دو محیط عبارتست از طول محیط دایره بنا براین
گوئیم طول محیط دایره حدیست مشترک که بسمتش میل میکند دو محیط کثیرالاضلاع منتظم
متشابه محاطی و محیطی که عدد اضلاعشان بتضاعیف ترقی کند و ثابت میکنیم که اینحد
همواره یکسان است هرچه باشد کثیرالاضلاع منتظمی که مبدا حرکت قرارش دادیم
یعنی هیچ بستگی ندارد بعدد اضلاع کثیرالاضلاع مفروض

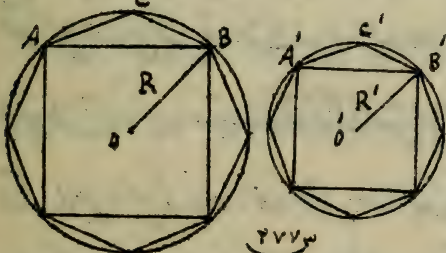
۲۷۹ - **طول قوس دایره** - طول قوس دایره حدی است که بسمتش
میل میکند محیط خط منکسر منتظم محاطی یا محیطی که عدد اضلاعش را بینهایت مضاعف
کنیم دلیل مذکور در طول محیط دایره در قوس هم جاریست فقط باید عوض

کثیر الاضلاع منتظم خط منکسر منتظم ذکر نموده

قضیّه ۲۴

۲۸۰ — **نسبت محیط دو دایره بیکدیگر مثل طول دو شعاع انهاست**

در دو دایره مفروضه o و o' که بشعاع R و R' باشند دو کثیر الاضلاع منتظم که یک عدد اضلاع باشند مثلاً دو مربع محاط میکنیم س ۲۷۷ پس نسبت P و P' محیط اینده کثیر الاضلاع بیکدیگر مثل نسبت دو شعاع دو دایره مفروضه است یعنی $\frac{P}{P'}=\frac{R}{R'}$ و این تناسب همواره محقق است هر چه باشد عدد اضلاع دو کثیر الاضلاع مفروضه و چون عدد اضلاع



این دو کثیر الاضلاع را بینهایت مضاعف کنیم محیطشان P و P' مرتباً میل میکنند بسمت دو حدشان س ۲۷۷ محیط دو دایره مفروضه که C و C' فرض میکنیم یعنی $\frac{C}{C'}=\frac{R}{R'}$ پس نسبت طول محیط دو دایره بیکدیگر مساویست با نسبت دو شعاع انها

۲۸۱ — **نتیجه — نسبت محیط هر دایره بقطرش عددی است ثابت**

فرض میکنیم C و C' محیط دو دایره باشند پس بنابر قضیه سابقه چنین خواهیم داشت

$$\frac{C}{C'}=\frac{R}{R'}=\frac{2R}{2R'} \quad \text{یا} \quad \frac{C}{2R}=\frac{C'}{2R'}$$

یعنی نسبت محیط هر دایره بقطرش

مثل نسبت محیط دایره دیگر است بقطرش بعبارة اخری نسبت محیط دایره بقطرش همواره مقداریست ثابت در جمیع دوایر و این نسبت ثابت عددی است اصم که آنرا عموماً بحرف یونانی π مینامند و پی تلفظ میشود پس $\frac{C}{2R}=\pi$ و دستور استخراج این عدد اصم را بتقریب بوجهی سهل بیان میکنیم و مقدار تقریبی آن کسر اعشاری بهفت رقم اینست $\pi=$ ۳٫۱۴۱۵۹۲۶ و در محاسبات عددیه عموماً مقدار آن را تا ۰٫۰۰۱ بتقریب اضافی استعمال کنند $\pi=$ ۳٫۱۴۱۶

۲۸۲- **اندازهٔ طول محیط دایره** - از رابطهٔ $\frac{C}{2R}=\pi$ چنین حاصل میشود $C=\pi\times 2R$ یا $C=2\pi R$ پس برای حساب کردن طول محیط دایره قطر آنرا در عدد π ضرب میکنیم

مثال ۱- میخواهیم معلوم کنیم طول محیط دایرهٔ که شعاع ۴٫۲ متر باشد از دستور فوق چنین حاصل میشود $C=4{,}2\times 2\pi=$ ۲۶٫۳۹ متر

مثال ۲- محیط دایره بطول ۲۲٫۶۳۴ متر است میخواهیم طول شعاع آن را تا یک میلیمتر بتقریب حساب کنیم- از دستور $C=2\pi R$ چنین استخراج میشود

$R=\frac{C}{2\pi}$ پس ۳٫۶۰۲۷ متر $=\frac{2{,}3135}{\pi}=\frac{4{,}627}{\pi}=\pi$

۲۸۳- **اندازهٔ طول قوسی از دایره**- طول محیط دایره یعنی طول قوس

۳۶۰ درجه است $2\pi R$ پس طول قوس یکدرجه چنین میشود $\frac{2\pi R}{360}$
یا $\frac{\pi R}{180}$ و بنابراین طول قوس n درجه چنین میشود $\frac{\pi R n}{180}$ پس اگر طول
قوس n درجه را l فرض کنیم دستور کلی چنین میشود $\frac{\pi R n}{180} = l$ و از روی
آن میتوان هرکدام از سه مقدار l و n و R را استخراج نمود هنگامیکه
دوتای دیگر معلوم باشند

مثال ۱ — میخواهیم طول قوس ۲۳ درجه و ۴۲ دقیقه و ۳۷ ثانیه از دایره که بشعاع
۲۲۵ میلیمتر باشد حساب کنیم — طول نیم دایره که بشعاع ۲۲۵ میلیمتر باشد درصورتیکه میلیمتر را
واحد فرض کنیم این است $\pi \times 225$ پس طول قوس یک ثانیه چنین میشود
$\frac{\pi\times225}{180\times60\times60} = \frac{\pi\times225}{648000}$ پس طول قوس ۲۳° و ۴۲' و ۳۷" یا ۸۵۳۵۷ ثانیه چنین میشود
$\frac{\pi\times225\times85357}{648000}$ یا $\frac{\pi\times20058,895}{648}$ یا ۹۷ میلیمتر تقریباً

مثال ۲ — در دایره طول قوس ۸۵ درجه و ۲۱ دقیقه و ۴۲ ثانیه مساوی است با ۰٫۴۵۲ متر
میخواهیم طول شعاع آن را حساب کنیم — قوس ۸۵° و ۲۱' و ۴۲" معادل است با ۳۰۷۳۰۲ ثانیه و قوس ۱۸۰°
معادل است با ۶۴۸۰۰۰ ثانیه. پس ۰٫۳۰۳ متر $= R = \frac{0,452\times648000}{\pi\times307302}$

مثال ۳ — طول قوسی ۱۹٫۶ متر است و شعاع دایره ۱۲٫۸ متر میخواهیم درجات آن قوس را
حساب کنیم $n = \frac{180\times19,6}{12,8\times\pi} = 87°,44$

محاسبهٔ (π) نسبت محیط دایره بقطر

۳۸۴- مسئله- میخواهیم مقدار تقریبی π نسبت محیط را بقطر معلوم کنیم
عدد اصم π را با هر حد تقریب که بخواهیم میتوان بقواعد مقدماتی استخراج نمود
زیرا که در نسبت $\pi = \frac{C}{2R}$ میتوان شعاع R را معلوم فرض کرد و طول محیط
C را بوسیلهٔ استخراج نمود و یا بالعکس محیط را معلوم فرض کرد و مقدار تقریبی شعاع را
استخراج نمود پس از این جا دو قاعده مختلف در استخراج مقدار تقریبی π استنباط
میشود بحسب آنکه شعاع یا محیط معلوم باشد قاعدهٔ اول را دستور دوره‌ها (محیطها)
گوئیم و قاعدهٔ دوم را دستور اتحاد دوره‌ها (رجوع کنید به متمم مقاله چهارم)

۳۸۵- دستور دوره‌ها- چون فرض کنیم $R = \frac{1}{2}$ نسبت $\pi = \frac{C}{2R}$
چنین میشود $\pi = C$ یعنی عدد π مساوی است با طول محیط دایره که شعاع $\frac{1}{2}$
واحد باشد پس مسئله راجع میشود باستخراج طول محیط دایره که بشعاع $\frac{1}{2}$ باشد
بنابراین در دایره مفروضه دو کثیرالاضلاع منتظمه که بیک عدهٔ اضلاع باشند
محاط و محیط میکنیم و بعد محیط‌های کثیرالاضلاعهای محاطی و محیطی را که عدد
اضلاعشان بتضاعیف ترقی کنند متدرجا حساب میکنیم و چون تفاضل
بین دو محیط ... دو کثیرالاضلاع محاطی و محیطی که بیک عدهٔ اضلاع باشند

دائماً در تنزل است و محیط دایره همواره محصور است ما بین این دو کثیرالاضلاع پس دوره های کثیرالاضلاعهای محاطی عبارتند از مقادیر تقریبی نقصانی محیط دایره یا عدد π و همچنین دوره های کثیرالاضلاعهای محیطی عبارت باشند از مقادیر تقریبی اضافی محیط دایره یا عدد π پس طول دایره یعنی عدد π تا هر حد تقریب نقصانی یا اضافه که خواسته باشیم بدست میآید

۲۸۶ - مثال — در دایره که شعاع $\frac{1}{2}$ باشد از مربع محاطی شروع میکنیم ضلع این مربع مساوی است با $\frac{\sqrt{2}}{2}$ و محیطش $2\sqrt{2}$ و ضلع مربع محیطی مساوی است با واحد و محیطش ۴ و چون بمدد دستورات (نمره ۲۷۱ و ۲۷۶)

$$C'_{n}=\frac{C_{n}\times R}{\sqrt{R^{2}-\frac{C_{n}^{2}}{4}}} \quad \text{و} \quad C_{2n}=\sqrt{2R\left(R-\sqrt{R^{2}-\frac{C_{n}^{2}}{4}}\right)}$$

متدرجاً اضلاع و بعد دوره های کثیرالاضلاعهای منتظم محاطی و محیطی را که صاحب ۸ و ۱۶ و ۳۲ و ۶۴ و ۱۲۸ و ۲۵۶ و . . . . ضلع باشند حساب کنیم دو رشته مقادیر تقریبی نقصانی و اضافی برای π بدست میآید از این قرار

کثیر الاضلاعهای محیطی	کثیر الاضلاعهای محاطی	عدد اضلاع
P'_{4} = ۴	P_{4} = ۲٫۸۲۸۴۲	۴
P'_{8} = ۳٫۳۱۳۷۱	P_{8} = ۳٫۰۶۱۴۶	۸
P'_{16} = ۳٫۱۸۲۶۰	P_{16} = ۳٫۱۲۱۴۴	۱۶
P'_{32} = ۳٫۱۵۱۷۳	P_{32} = ۳٫۱۳۶۵۴	۳۲
P'_{64} = ۳٫۱۴۴۱۲	P_{64} = ۳٫۱۴۰۳۳	۶۴
P'_{128} = ۳٫۱۴۲۲۳	P_{128} = ۳٫۱۴۱۲۷	۱۲۸
P'_{256} = ۳٫۱۴۱۷۵	P_{256} = ۳٫۱۴۱۵۱	۲۵۶

و چون در کثیر الاضلاع ۲۵۶ ضلعی توقف کنیم می بینیم که مقدار π مندرج است مابین دو عدد ۳٫۱۴۱۵۱ و ۳٫۱۴۱۷۵ پس ارقام مشترکهٔ این دو عدد ۳٫۱۴۱ ارقام حقیقی π باشند و چون تفاضل $P'_{256} - P_{256}$ کوچکتر است از ۰٫۰۰۰۵ و

پس π = ۳٫۱۴۱ تا کمتر از یک نیم هزارم تقریب نقصانی است

۲۸۷ــ تبصره ــ عدد اصم π را تا هر قدر تقریب که بخواهیم میتوان حساب کرد چنانچه تا ۵۰۰ رقم اعشار استخراج کرده اند بی آنکه فایدهٔ علمی داشته باشد و تا ۱۶ رقمش این است π = ۳٫۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳۲ و اما در عملیات بیش از چهار

وفهم یا ۲ رقم اعشار استعمال نکند ۱۴ر۳ = π تقریب ضعافی و ۱۴ر۳ = π

و مقدار $\frac{1}{\pi}$ نیز غالباً در محاسبات خیلی مفید است ۰۰۰ ۳۱۸۳۰۹۸۸۶ر۰ = $\frac{1}{\pi}$

ارشمیدس مهندس مشهور که ۲۸۷ سال قبل از میلاد مسیح در شهر سیراکوز متولد شده اول کسی است که مقدار تقریبی π را تا $\frac{22}{7}$ بدست آورده و او از روی و مساحت دوره ها از مسدس شروع کرده تکثیر الاضلاع ۹۶ ضلعی ختم نموده است

ویلیوس مهندس مشهور هلندی که در قرن شانزدهم حیات داشته مقدار $\frac{355}{113}$ بدست آورده و چون آن را باعشار تحویل کنیم تا ۶ رقم اعشار موافق آید

و طریق ضبطش این است که اعداد فرد او ۳ و ۵ هر کدام را ۲ مرتبه از یسار به یمین نوشته باین صورت ۱۱۳۳۵۵ و بعد ۳ رقم اول را مخرج کسر قرار دهیم و ۳ رقم ثانی را صورت

اشعار ذیل را یکی از علمای اروپا در مدح ارشمیدس ساخته و فایده اش این است که چون اعداد حروف کلمات این ردیف یکدیگر قرار دهیم مقدار π تا ۳۰ رقم اعشار بدست می آید　　(رباعی)

Que j'aime à faire apprendre un
۳　۱　۴　۱　۵　۹　۲
nombre utile aux sages !
۶　۵　۳　۵

Immortel Archimède, artiste ingénieur,
Qui de ton jugement peut priser la valeur,
Pour moi ton problème eut de pareils avantages.

۸ ۹ ۷ ۹
۳ ۲ ۳ ۸ ۴ ۶ ۲ ۶
۴ ۳ ۳ ۸ ۳ ۲ ۷ ۹

$\pi =$ ۳، ۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳۲۳۸۴۶۲۶۴۳۳۸۲۷۹

۳ـ مساحت اشکال مسطحه

۲۸۸ـ **تعریف** ـ مساحت عبارتست از وسعت قطعه محدودی از سطح ، دو کلمهٔ مساحت و سطح دارای معانی مختلف است چونکه در اولی نظر بوسعت سطح است و در دومی بصورت ولی غالباً بجای یکدیگر استعمال میشوند

۲۸۹ـ اندازه مساحت سطحی عبارتست از نسبت این سطح بواحد سطح یعنی مربعی که ضلعش واحد طول باشد و چون واحد اصلی طول ذرع است واحد اصلی سطح نیز ذرع مربعست ولی بحسب اختلاف حالات آحاد دیگر نیز مستعمل است

۲۹۰ـ دو سطح متساوی آنست که قابل انطباق باشند و دو سطح متعادل آنست که بیک وسعت و مساحت باشند دو سطح متساوی همواره متعادلند واما دو سطح متعادل میتوانند متساوی نباشند مثلاً مربع و مثلث که هرگز قابل انطباق و متساوی نیستند میتوانند متعادل باشند

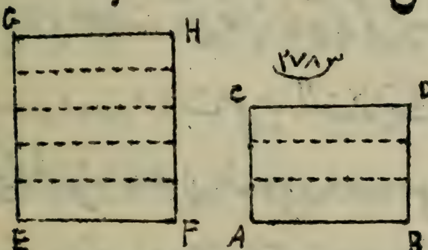
۳۹۱ — در هر متوازی الاضلاع یکی از اضلاع را قاعده گوئیم و عمود مشترک مابین قاعده و ضلع مقابل را ارتفاع — در هر مربع مستطیل هر دو ضلع مجاور را قاعده و ارتفاع یا طول و عرض یا دو بعد مستطیل گوئیم — در مثلث هر یک از اضلاع را قاعده گوئیم و عمود وارد از راس بر قاعده را ارتفاع — در هر ذوذنقه دو ضلع متوازی را قاعدتین گوئیم و عمود مشترک مابین دو قاعده را ارتفاع

اولاً — مساحت مربع مستطیل

قضیهٔ ۵

۳۹۲ — نسبت دو مستطیلی که بر یک قاعده باشند مثل دو ارتفاع آنهاست

(ش ۲۷۸)



در دو مستطیل ABCD و EFGH دو قاعده AB و EF متساوی هستند

فرض میکنیم دو ارتفاع AC و EG مقیاس مشترکی داشته باشند و آن سه مرتبه در AC بگنجد و ۵ مرتبه در EG پس این تناسب نتیجه میشود $\frac{AC}{GE}=\frac{3}{5}$

و از نقاط تقسیم خطوط موازات دو قاعده رسم میکنیم تا مستطیل ABCD قسمت شود بر سه مستطیل جزء و مستطیل EFGH بر ۵ مستطیل جزء و جمیع این مستطیلهای جزء

متساوی هستند چونکه بر قواعد متساویه و برار تفاعات متساویه باشند پس از این تغییرا

$\frac{۳}{۵} = \frac{ABCD}{EFGH}$ و چون این دو تناسب را مقایسه نمائیم چنین حاصل شود

$$\frac{R}{R'} = \frac{h}{h'} \quad \text{یا} \quad \frac{ABCD}{EFGH} = \frac{AC}{EG}$$

تبصره — هرگاه دو خط AC و EG نسبت بهم اصم باشند یعنی مقیاس مشترک نداشته باشند میتوان همواره طولی بقدر کفایت کوچکی اختیار نمود که بدون خطای محسوس بعده مرات صحیح در هر کدام از دو خط AC و EG بگنجد و باز قضیه مذکوره محقق است (نمره ۲۲۶)

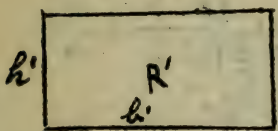
۲۹۳ — نتیجه — نسبت دو مستطیل که برابر یک ارتفاع باشند مثل دو قاعده آنها است زیرا که هر یک از اضلاع مستطیل را میتوان قاعده یا ارتفاع فرض نمود کلیه دو مستطیل که در یک بعد مشترک باشند نسبتشان مثل دو بعد دیگر است

قضیه ۶

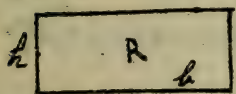
۲۹۴ — نسبت دو مستطیل بیکدیگر مثل حاصل ضرب دو قاعده آنها است در دو ارتفاع

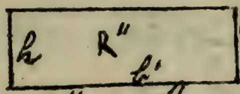
فرض میکنیم R و R' دو مستطیل باشند ش ۲۷۹ و قواعد شان بترتیب b و b' و ارتفاعشان h و h' و مستطیل ثالثی R'' فرض میکنیم که برارتفاع اول h و بر قاعده

دوم h' باشد پس بنابر قضیه سابقه چون دو مستطیل R و R'' برابر ارتفاع واحد h هستند نسبتشان مثل دو قاعده آنهاست س ۲۷۹



یعنی $\frac{R}{R'} = \frac{b}{b'}$ وچون دو مستطیل R'' و R' بریک قاعده b' هستند نسبتشان





مثل دو ارتفاع آنهاست یعنی $\frac{R''}{R'} = \frac{h}{h'}$ وچون این دو تناسب را جمله بجمله دریکدیگر ضرب کنیم چنین میشود

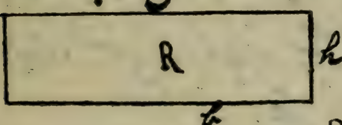
$$\frac{R \times R''}{R'' \times R'} = \frac{b \times h}{b' \times h'}$$

یا

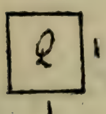
$$\frac{R}{R'} = \frac{b \times h}{b' \times h'}$$

قضیهٔ ۷

۲۹۵ — مساحت مربع مستطیل مساویست بحاصل ضرب قاعده اش در ارتفاع



فرض میکنیم b و h دو بعد مربع مستطیل R س ۲۹۰



باشند س ۲۸۰ و مربع Q واحد سطح باشد یعنی ضلعش واحد طول باشد که در اندازه گرفتن طولهای h و b بکار برده ایم پس بنابر قضیهٔ سابقه چنین خواهیم داشت $\frac{R}{Q} = \frac{b \times h}{1 \times 1} = bh$ پس نسبت مستطیل R بواحد سطح یعنی مساحتش مساوی است باحاصل ضرب قاعده اش در ارتفاع

و چون مساحت مستطیل را سه فرض کنیم دستور کلی چنین میشود طو × عر = سه

تبصره - شرط تحقق قضیه آنست که اولاً دو بعد مستطیل باید بیک واحد طول اندازه گرفته شوند ثانیاً واحد سطح باید سطح مربعی باشد که ضلعش واحد طول باشد ما من بعد این دو شرط را محقق فرض کنیم

۲۹۶- نتیجه - مساحت مربع مساویست با مجذور ضلعش زیرا که مربع در حقیقت مستطیلی است که هر دو ضلعش متساوی باشند پس اگر ضلع مربع را ح فرض کنیم مساحت این مربع چنین میشود

$$\text{سه} = ح \times ح = ح^{۲}$$

۲۹۷- مثال - مطلوبست مساحت قطعه زمینی که بشکل مستطیل باشد و بطول ۱۵ ذرع و ۷ گره و بعرض ۱۲ ذرع و ۵ گره

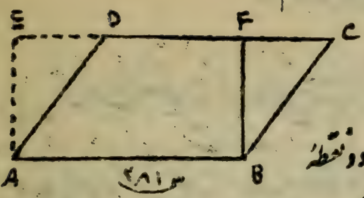
$$\left(۱۵+\frac{۷}{۱۶}\right)\left(۱۲+\frac{۵}{۱۶}\right)=\frac{۴۸۶۵۹}{۲۵۶}=۱۹۰+\frac{۱۹}{۲۵۶}\ \text{ذرع مربع}$$

و یا ۱۹۰ ذرع مربع باضافه یک گره مربع تقریباً چونکه معماران ایران $\frac{۱۶}{۲۵۶}$ ذرع مربع را یک گره مربع میگیرند

ثانیاً - مساحت متوازی الاضلاع

قضیه ۸

۲۹۸- مساحت متوازی الاضلاع مساویست بحاصل



ضرب قاعده اش در ارتفاع آن

در متوازی الاضلاع مفروض ABCD از دو نقطهٔ A و B دو عمود AE و BF را اخراج میکنیم تا مستطیل AEFB تشکیل شود و در دو مثلث قائم الزاویه AED و BFC وتر و یک ضلع متساوی هستند یعنی AD = BC چونکه اضلاع متقابلهٔ متوازی الاضلاع باشند و AE = BF چونکه اضلاع متقابلهٔ مستطیل باشند پس این دو مثلث متساوی میگردند و چون بجای مثلث FBC مساویش مثلث AED را قرار دهیم متوازی الاضلاع ABCD بدل شود به مستطیل AEFB که بر قاعده و ارتفاع آن باشد پس این دو شکل متعادلند و چون مساحت این مستطیل مساوی است با AB × FB پس مساحت متوازی الاضلاع ABCD نیز مساوی است بحاصل ضرب قاعده اش AB در ارتفاعش BF و چون قاعده و ارتفاع را رمزاً به قه و عه بنمایم دستور کلی چنین میشود مه = قه عه

۳۹۹ – نتیجهٔ ۱ – هر دو متوازی الاضلاع که بر قاعده و ارتفاع واحد باشند متعادلند

۴۰۰ – نتیجهٔ ۲ – هر متوازی الاضلاعی معادل است با مستطیلی که بر قاعده و ارتفاع آن باشد

۲۰۱- نتیجه ۲- هر دو متوازی الاضلاعی که بیک قاعده باشند نسبتشان مثل دو ارتفاع آنهاست و اگر بر یک ارتفاع باشند نسبتشان مثل دو قاعده است

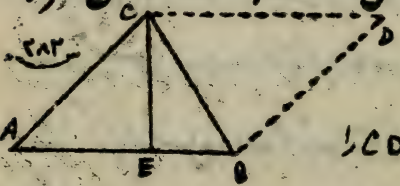
فرض میکنیم S و S' مساحت دو متوازی الاضلاع باشند و b و b' دو قاعده‌شان و h و h' دو ارتفاعشان پس بنابر قضیه سابقه چنین خواهیم داشت

$b\times h = S$ و $b'\times h' = S'$ و چون این دو تساوی را عضو بعضو بر یکدیگر قسمت کنیم چنین میشود $\frac{S}{S'} = \frac{b \times h}{b' \times h'}$ و اگر فرض کنیم $h' = h$ چنین میشود $\frac{S}{S'} = \frac{b}{b'}$ و اگر $b' = b$ چنین میشود $\frac{h}{h'} = \frac{S}{S'}$

ثالثاً مساحت مثلث

قضیه ۹

۲۰۲- مساحت مثلث مساوی است بنصف حاصل ضرب قاعده‌اش در ارتفاع آن

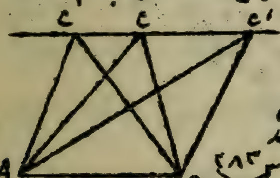


در مثلث مفروض ABC ش ۲۸۲ خط CD را بموازات AB رسم میکنیم و خط BD را بموازات AC تا متوازی الاضلاع ABCD تشکیل شود در دو مثلث ABC و CBD چون سه ضلع نظیر بنظیر متساویند اند دو مثلث متساوی میشوند پس مثلث ABC نصف متوازی الاضلاع

ABCD است که بر همان قاعده AB و همان ارتفاع CE آن باشد و چون
مساحت متوازی الاضلاع مساویست بحاصل ضرب AB × CE
پس مساحت مثلث ABC مساویست با $\frac{AB \times CE}{۲}$ یعنی نصف حاصل ضرب
قاعده اش AB در ارتفاعش CE و چون AB و CE را بترتیب
ق و ع بنامیم دستور کلی مساحت مثلث چنین میشود

$$س = \frac{ق \times ع}{۲} = ق \times \frac{ع}{۲} = \frac{ق}{۲} \times ع$$

۴۰۳- **نتیجه ۱** – دو مثلث که بر یک قاعده و بر یک ارتفاع باشند متعادلند



شکل ۲۸۳

مثلاً اگر در مثلث ABC دو راس A و B ثابت
باشند و راس سوم C ما در روی خط EE′ موازی قاعدهٔ
AB سیر دهیم مساحت مثلث تغییر نمیکند چونکه ارتفاع بیک حال باقی است

۴۰۴- **نتیجه ۲** – هر دو مثلث که بر قاعده واحد باشند نسبتشان مثل دو ارتفاع
است و اگر بر ارتفاع واحد باشند نسبتشان مثل دو قاعده است
فرض میکنیم س و س′ مساحت دو مثلث باشد و ق و ق′ دو قاعده شان
و ع و ع′ دو ارتفاعشان پس بنا بر قضیهٔ سابقه چنین خواهیم داشت

$$\frac{ق \times ع}{۲} = س \quad و \quad \frac{ق′ \times ع′}{۲} = س′$$ و از آنجا $$\frac{س}{س′} = \frac{ق \times ع}{ق′ \times ع′}$$ و اگر [illegible]

فرض میکنیم $h' = h$ و $b' = b$ چنین حاصل میشود $\frac{bh}{b'h'} = \frac{S}{S'}$ و $\frac{h}{h'} = \frac{S}{S'}$

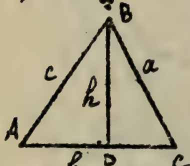
۴۰۵- مسئله- میخواهیم مساحت مثلث را از روی سه ضلعش معلوم کنیم

سابقاً در نمره ۲۲۵ معلوم کرده ایم که اگر سه ضلع مثلث را به a و b و c و محیط آنرا به $2p$ نمائیم طول ارتفاع $AH = h$ وارد بر ضلع a چنین میشود $h = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ پس مساحت مثلث بحسب اضلاعش این است

$$S = \frac{a}{2}\times h = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

۴۰۶- مسئله- میخواهیم مساحت مثلث متساوی الاضلاع را از روی ضلعش معلوم کنیم

فرض کنیم c ضلع و $h = BD$ ارتفاع مثلث متساوی الاضلاع ABC باشد پس مساحت مثلث چنین میشود $S = \frac{c}{2}\times h = \frac{AC \times BD}{2}$ و چون D وسط AC است پس از مثلث قائم الزاویه ABD چنین نتیجه میشود



(شکل ۲۸۴)

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AD}^2 = c^2 - \frac{c^2}{4} = \frac{3c^2}{4}$$ و از آنجا

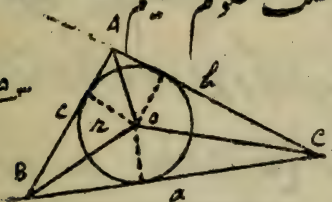
پس $BD = h = \frac{c\sqrt{3}}{2}$ ، $S = \frac{c}{2}\times\frac{c\sqrt{3}}{2} = \frac{c^2\sqrt{3}}{4}$

و این مقدار را از روی دستور مسئله سابقه نیز میتوان بدست آورد زیرا که اگر در دستور $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ قرار دهیم $c = b = a$

$p = \frac{3c}{2}$ چنین نتیجه میشود $S = \sqrt{\frac{3c}{2}\times\frac{c}{2}\times\frac{c}{2}\times\frac{c}{2}} = \frac{c^2\sqrt{3}}{4}$

۲۰۷ — مسئله — میخواهیم مساحت مثلث را از روی اضلاعش و شعاع دایرهٔ محاطیه در آن مثلث معلوم کنیم

ش ۲۸۵



در مثلث ABC دایرهٔ O را محاط میکنیم و از مرکز O برئوس مثلث وصل میکنیم

این مثلث منقسم میشود بر سه مثلث جزء OBC و OAC و OAB که قواعدشان بترتیب اضلاع a و b و c میباشند و ارتفاع مشترکشان r شعاع دایرهٔ محاطیه پس اگر محیط مثلث ABC را به 2p بنمائیم مساحت این مثلث چنین میشود

$$ABC = OAB + OAC + OBC = (BC + CA + AB)\times\frac{r}{2}$$

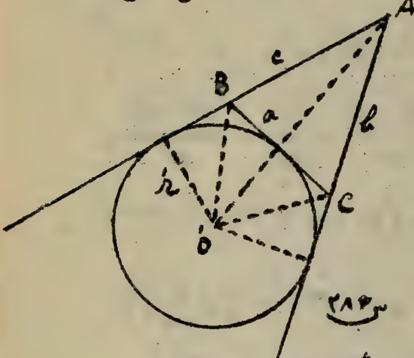
پس $S = (a + b + c)\times\frac{r}{2} = 2p\times\frac{r}{2} = pr$

و فرض این مسئله را میتوان باین حکم ادا نمود که مساحت هر مثلث مساویست با حاصل ضرب محیطش در نصف شعاع دایرهٔ محاطیه در آن مثلث

تبصره — از تساوی $S = pr$ چنین استخراج میشود $r = \frac{S}{p}$ و یا چون بجای S مقدارش را قرار دهیم چنین میشود $r = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$

پس شعاع دایرهٔ محاطیه در هر مثلث مساوی است با خارج قسمت سطح آن مثلث بر نصف محیطش

۲۰۸ – مساحت مثلث را بحسب اضلاعش و شعاع یکی از دوایر مماس خارج نیز میتوان معلوم نمود – مثلث ABC مفروض است و در زاویه A دایرهٔ مماس خارج O' را رسم میکنیم و چون از مرکزهٔ بر دسس A و B و C وصل کنیم سه مثلث $O'AB$ و $O'AC$ و $O'BC$ تشکیل میشود که قواعدشان مرتباً a و b و c اضلاع مثلث ABC باشند و ارتفاع مشترکشان r' شعاع دایره مماس خارج O' و اما مثلث ABC معادل است با مجموع دو مثلث $O'AB$ و $O'AC$ منهای مثلث $O'BC$ پس مساحت مثلث ABC چنین میشود



ش ۲۸۴

$$ABC = O'AB + O'AC - O'BC$$

$$= (AB + AC - BC) \times \frac{r'}{2} = (b + c - a) \times \frac{r'}{2}$$

و چون $b + c - a = 2(p - a)$ پس $s = (p - a) \times r'$

و مقدار r' نیز چنین میشود $r' = \frac{s}{p-a} = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}$

و چون اشعهٔ دو دایرهٔ مماس خارج در زاویه B و C را r'' و r''' فرض کنیم باز چنین خواهیم داشت $r''(p - b) = s$ و $r'''(p - c) = s$

و از آنجا $r'' = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-c)}{p-b}}$ و $r''' = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)}{p-c}}$

۴۰۵ — تبصره — از چهار دستور $ر \times p =$ سه و $ر'(p-a) =$ سه

$ر''(b-p) =$ سه و $ر'''(p-c) =$ سه چنین نتیجه میشود $\frac{1}{ر} = \frac{p}{سه}$

و $\frac{1}{ر'} = \frac{p-a}{سه}$ و $\frac{1}{ر''} = \frac{p-b}{سه}$ و $\frac{1}{ر'''} = \frac{p-c}{سه}$ و چون

$p = (p-a)(p-b)(p-c)$ پس $\frac{1}{ر} = \frac{1}{ر'} + \frac{1}{ر''} + \frac{1}{ر'''}$

و همچنین چون چهار دستور فوق را در یکدیگر ضرب کنیم چنین میشود

$$سه^4 = p(p-a)(p-b)(p-c) \times ر\,ر'\,ر''\,ر'''$$

و چون $سه^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$ پس $ر\,ر'\,ر''\,ر''' = سه^2$ یا $سه = \sqrt{ر\,ر'\,ر''\,ر'''}$

۴۰۶ — مسئله — میخواهیم مساحت مثلث را بحسب اضلاع و شعاع دایره محیطه معلوم کنیم — چون شعاع دایرهٔ محیطه را R فرض کنیم در نمره ۳۳۲ (قضیه ۲۲) ثابت کرده ایم که در مثلث ABC حاصل ضرب دو ضلع مساویست با حاصل ضرب ارتفاع وارد بر ضلع سوم در قطر دایرهٔ محیطیه یعنی $AB \times AC = AH \times AD$ یا $b \times c = h \times 2R$ و چون طرفین این تساوی را در ضلع سوم a ضرب کنیم چنین میشود $a \times b \times c = a \times h \times 2R$ و چون ملاحظه کنیم که $a \times h$ مساویست با ۲ سه یعنی دو برابر مساحت مثلث پس $abc = ۲\,سه \times 2R$

یا $abc = ۴\,سه\,R$ یعنی حاصل ضرب سه ضلع هر مثلث مساوی است با چهار

برابر حاصل ضرب مساحتش در شعاع دایره محیطیه و از این تساوی چنین نتیجه میشود $S=\frac{abc}{4R}$ که پس مساحت مثلث مساویست با حاصل ضرب سه ضلع تقسیم بر چهار برابر شعاع دایرهٔ محیطیه

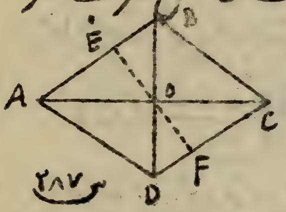
و بالعکس از روی اضلاع مثلث میتوان شعاع دایره محیطیه را بدست آورد زیرا که از تساوی $S=\frac{abc}{4R}$ که چنین استخراج میشود $R=\frac{abc}{4S}$ و یا چون بجای S مقدارش را قرار دهیم چنین میشود

$$R=\frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

رابعاً — مساحت لوزی

قضیه

۲۱۰ — مساحت لوزی مساویست با نصف حاصل ضرب دو قطرش



ش ۲۸۷

چون میدانیم که در هر لوزی ABCD ش ۲۸۷ دو قطر AC و BD هم عمودند بر یکدیگر و هم منصف یکدیگرند در نقطهٔ تقاطع پس چنین خواهیم داشت

$$ABCD = ABC + ACD =$$

$$= AC\times\frac{OB}{2} + AC\times\frac{OD}{2} = AC\times\frac{OB+OD}{2} = \frac{AC\times BD}{2}$$

و چون مساحت لوزی را S و دو قطر آنرا d و d' فرض کنیم دستور کلی چنین میشود $S=\frac{dd'}{2}$

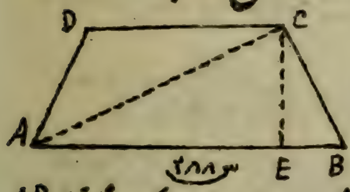
تبصره — چون لوزی را میتوان مانند متوازی الاضلاع تصور نمود پس مساحتش

مساویست بحاصل ضرب یکی از اضلاعش در فاصلهٔ دو ضلع مقابل مثلاً

خامساً ـ مساحت ذوذنقه

قضیهٔ ۱۱

۴۱۱ ـ **مساحت ذوذنقه مساویست بحاصل ضرب نصف مجموع دو قاعده اش در ارتفاع**



ذوذنقه ABCD مفروض است

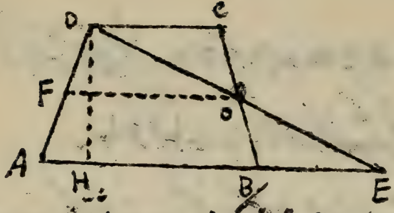
چون قطر AC را رسم کنیم ذوذنقه تقسیم میشود بدو مثلث ABC و ADC که قواعدشان بترتیب AB و DC قاعدتین ذوذنقه باشند و ارتفاع مشترکشان CE ارتفاع ذوذنقه است و مساحت مثلث ABC مساویست با $\frac{AB}{2}\times CE$ و مساحت مثلث ADC مساویست با $\frac{DC}{2}\times CE$ پس مساحت ذوذنقه مساویست با مجموع مساحت این دو مثلث و چنین نوشته میشود

$$ABCD=\frac{AB}{2}\times CE+\frac{DC}{2}\times CE=\frac{AB+DC}{2}\times CE$$

و چون مساحت ذوذنقه را س و قاعدتین آن را B و B' و ارتفاع را ع فرض کنیم دستور کلی چنین شود

$$س=\frac{B+B'}{2}\times ع$$

۴۱۲ ـ دلیل دیگر ـــ ذوذنقه ABCD را میتوان بدل نمود بمثلثی معادل آن پس از نقطهٔ D بنقطهٔ O بخط



قطر BC وصل میکنیم س۲۸۹ و OD را امتداد میدهیم تا امتداد قاعدهٔ AB را در نقطهٔ E تلاقی کند و در دو مثلث DCO و EBO دو زاویه و ضلع بینهما مساوی است یعنی $OC = OB$ بعلاوه دو زاویه در O نیز و بند چونکه متقابله براسند و دو زاویه $\hat{B}$ و $\hat{C}$ نیز مساویند چونکه متبادله اند پس این دو مثلث متساوی میشوند و ذوذنقهٔ ABCD معادل شود با مثلث ADE و مساحت این مثلث مساوی است با $\frac{AB + BE}{2} \times DH$ واما از تساوی دو مثلث DCO و EBO چون $DC = BE$

پس مساحت ذوذنقه چنین میشود $ABCD = \frac{AB + CD}{2} \times DH$

۴۱۳- تبصره - این حکم نیز محقق است که مساحت ذوذنقه مساویست با حاصل ضرب خط واصل مابین منتصف دو ضلع غیر متوازی در ارتفاع

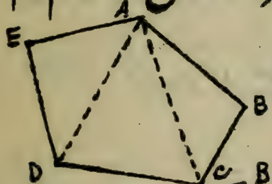
برهان - چون از نقطهٔ O وسط BC س۲۸۹ خط OF را بموازات AE رسم کنیم مثلث DFO شبیه شود بمثلث ADE و $\frac{DO}{DE} = \frac{DF}{DA} = \frac{FO}{AE}$

وچون $\frac{DO}{DE} = \frac{1}{2}$ پس $\frac{DF}{DA} = \frac{1}{2}$ و $\frac{OF}{AE} = \frac{1}{2}$ پس معلوم شد که نقطهٔ F نیز وسط AD است و $OF = \frac{AE}{2} = \frac{AB + CD}{2}$ پس مساحت

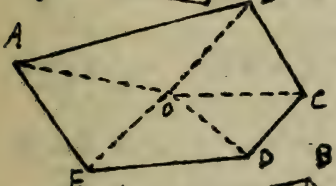
ذو ذنقه چنین میشود $م = \frac{AB+CD}{2}\times DH = OF\times DH$

سادساً — مساحت کثیر الاضلاع

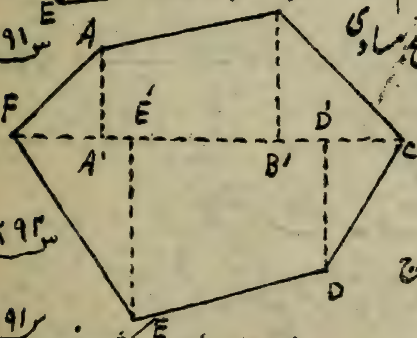
۲۱۴ — مسئله — میخواهیم مساحت کثیر الاضلاع را معلوم کنیم



ش ۲۹۰



ش ۲۹۱



ش ۲۹۲

برای اندازه گرفتن مساحت کثیر الاضلاعی دو قاعده مستعمل است

اولاً — کثیر الاضلاع را بر چند مثلث قسمت میکنیم و مساحت آنها را معلوم میکنیم و جمع مینمائیم پس مساحت کثیر الاضلاع مساوی خواهد شد با مجموع مساحت این مثلثات و برای تجزیه کردن کثیر الاضلاعی بمثلثات میتوان اقطاری مرور داد که از یک رأس خارج شوند ش ۲۹۰ و یا خطوطی که از یک نقطه درونی وصل شوند بجمیع رؤس کثیر الاضلاع ش ۲۹۱

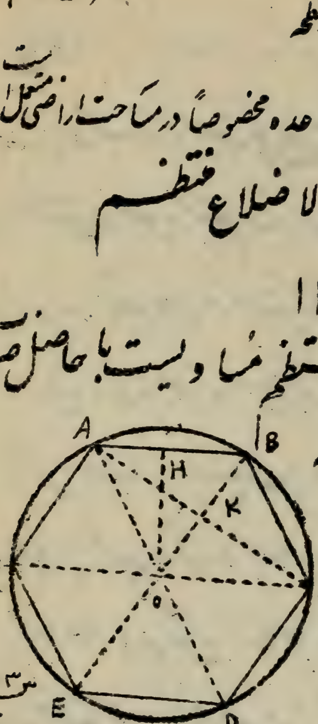
ثانیاً — قطر اطول کثیر الاضلاع مفروض را رسم میکنیم ش ۲۹۲ و از جمیع رؤس عمودها براین قطر فرود میآوریم و باین عمل کثیر الاضلاع تجزیه میشود بذو ذنقه‌ها و مثلثات قائم الزوایا و چون مساحت آنها را معلوم کنیم و جمع نمائیم مجموع

مساویست با مساحت کثیرالاضلاع و این قاعده مخصوصاً در مساحت اراضی مستعمل است

سابعاً — مساحت کثیرالاضلاع منتظم

قضیهٔ ۱۲

۲۱۵ — مساحت کثیرالاضلاع منتظم مساویست با حاصل ضرب محیطش در نصف شعاع دائره محاطیه



(س ۲۹۳)

کثیرالاضلاع منتظم n ضلعی ABCDEF مفروض است س ۲۹۳ چون از مرکز O بجمیع رئوس وصل کنیم کثیرالاضلاع تجزیه میشود که n عدد مثلثات متساوی الساقین که جمیعاً متساوی هستند چونکه در سه ضلع نظیر بنظیر متساوند و ارتفاع مشترکشان OH شعاع دایره محاطیه یعنی ارتفاع کثیرالاضلاع است و مساحت هر یک از این مثلثات مثلاً مثلث AOB مساویست با $AB \times \frac{OH}{2}$ است پس مساحت کثیرالاضلاع که n برابر مساحت مثلث AOB است مساوی است با حاصل ضرب $AB \times \frac{OH}{2}$ در n که عدد اضلاع است پس

$$S = AB \times \frac{OH}{2} \times n \quad \text{یا} \quad S = AB \times n \times \frac{OH}{2}$$

و چون ملاحظه کنیم که $AB \times n$ عبارتست از محیط (P) کثیرالاضلاع و OH را

(۱)

a مینامیم دستور کلی چنین میشود $\frac{a}{2} \times P =$ س یعنی مساحت کثیرالاضلاع منتظم مساویست با حاصل ضرب محیطش در نصف ارتفاع

۶۱۲ - تبصره - مساحت کثیرالاضلاع منتظم که عدد اضلاعش زوج باشد بحسب شعاع دایره محیطیه و ضلع کثیرالاضلاعی که عدد اضلاعش نصف آن باشد این است

$$س = n \times \frac{R}{2} \times \frac{c}{2} \qquad (۲)$$

فرض میکنیم در کثیرالاضلاع مفروض n عدد اضلاع زوج باشد و در مثلث AOB چون شعاع $OB = R$ را قاعده فرض کنیم ارتفاعش میشود AK یعنی نصف $AC = c$ ضلع کثیرالاضلاع منتظمی که بهمان شعاع باشد ولی عدد اضلاعش نصف کثیرالاضلاع مفروض پس مساحت مثلث AOB چنین میشود $AOB = \frac{OB}{2} \times AK = \frac{R}{2} \times \frac{c}{2}$ پس مساحت کثیرالاضلاع چنین خواهد شد $س = n \times \frac{R}{2} \times \frac{c}{2}$ و چون ملاحظه کنیم که $\frac{n}{2} \times c$ محیط کثیرالاضلاعی است که عدد اضلاعش $\frac{n}{2}$ باشد پس دستور را میتوان باین عبارت تعبیر نمود که مساحت کثیرالاضلاعی که عدد اضلاعش n زوج باشد مساوی است با حاصل ضرب نصف شعاعش در محیط کثیرالاضلاعی که عدد اضلاعش $\frac{n}{2}$ باشد

۲۱۲- طول اضلاع و ارتفاعات بعضی از کثیرالاضلاعهای منتظمه عمده را سابقاً بحسب شعاع دایرهٔ محیطیه معلوم کرده ایم و حال از روی دستورهای (۱) (۲) میتوان مساحت این کثیرالاضلاعها را بحسب شعاع دایره محیطیه و اضلاع معلوم نمود

اولاً- مساحت مربع - چون ضلع مربع را c فرض کنیم مساحتش چنین میشود

$S = c^2$ که و از طرف دیگر $c = R\sqrt{2}$ پس $S = c^2 = 2R^2$

ثانیاً- مساحت مثلث متساوی الاضلاع - سابقاً دیدیم که مساحت مثلث متساوی الاضلاع این است $S = \frac{c^2\sqrt{3}}{4}$ و چون $c = R\sqrt{3}$ پس $S = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$

ثالثاً- مساحت مخمس - چون $C = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ و $a = \frac{R}{4}(\sqrt{5}-1)$

پس از دستور (۱) چنین استخراج میشود $S_5 = \frac{5R^2}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

و چون در این دستور بجای R مقدارش $\frac{2c}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$ را قرار دهیم چنین میشود

$$S_5 = \frac{5c^2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2(10-2\sqrt{5})} = \frac{c^2}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}} = 1{,}720\ldots\times c^2$$

رابعاً- مساحت مسدس - چون عدد اضلاع مسدس زوج است مساحتش از هر دو دستور بدست میآید پس اگر در دستور (۲) ضلع مثلث را که $R\sqrt{3}$ است قرار دهیم چنین نتیجه میشود $S_6 = 6\times\frac{R}{2}\times\frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$ و چون $c = R$ پس $S_6 = \frac{3c^2\sqrt{3}}{2}$ و اگر ارتفاع مسدس را که $\frac{R\sqrt{3}}{2}$ است در

دستور (۱) قرار دهیم بازچنین نتیجه میشود $\frac{۳R^۲\sqrt{۳}}{۲} = ۶\times\frac{R\sqrt{۳}}{۴} = $ سطح$_۶$

خامساً ـ مساحت مثمن ـ چون عدد اضلاع مثمن منتظم زوج است مساحتش از روی هر دو دستور بدست میآید پس اگر ضلع مربع را که $R\sqrt{۲}$ است در دستور

(۲) قرار دهیم چنین نتیجه میشود $۲R^۲\sqrt{۲} = \frac{R\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{R}{۲}\times ۸ = $ سطح$_۸$

وازطرف دیگر از دستور $c = R\sqrt{۲-\sqrt{۲}}$ چنین استخراج میشود $R = \frac{c}{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}$

یا $\frac{c^۲(۲+\sqrt{۲})}{۲} = \frac{c^۲}{۲-\sqrt{۲}} = R^۲$ و چون در دستور $۲R^۲\sqrt{۲} = $ سطح

بجای R مقدارش $\frac{c}{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}$ را قرار دهیم مساحت مثمن منتظم بحسب ضلعش

چنین میشود $۲c^۲(۱+\sqrt{۲}) = c^۲(۲+\sqrt{۲})\sqrt{۲} = $ سطح$_۸$

سادساً ـ مساحت معشر ـ چون $\frac{R\sqrt{۱۰-۲\sqrt{۵}}}{۲}$ ضلع مخمس را در دستور

(۲) قرار دهیم مساحت معشر چنین میشود $\frac{۵R^۲}{۴}\sqrt{۱۰-۲\sqrt{۵}} = \frac{\sqrt{۱۰-۲\sqrt{۵}}}{۴}\times\frac{R}{۲}\times ۱۰ = $ سطح$_{۱۰}$

وچون از $c = \frac{R}{۲}(\sqrt{۵}-۱)$ مقدار R را استخراج نموده در دستور فوق قرار

دهیم مساحت معشر بحسب ضلعش چنین میشود $\frac{۵c\sqrt{۱۰-۲\sqrt{۵}}}{۶-۲\sqrt{۵}} = $ سطح$_{۱۰}$

و یا $\frac{۵}{۲}c^۲\sqrt{۵+۲\sqrt{۵}} = $ سطح$_{۱۰}$ یا $۷{,}۶۹۴\ldots\times c^۲ = $ سطح$_{۱۰}$

سابعاً ـ مساحت کثیرالاضلاع ۱۲ ضلعی منتظم ـ چون ضلع مسدس یعنی R را

در دستور (۲) قرار دهیم چنین نتیجه میشود $۳R^۲ = \frac{R}{۲}\times\frac{R}{۲}\times ۱۲ = $ سطح$_{۱۲}$

و چون از $C_{12}=R\sqrt{2-\sqrt{3}}$ مقدار R را استخراج کنیم و آن را در دستور مح$_{12}$ $=3R^2$ قرار دهیم چنین نتیجه میشود مح$_{12}$ $=3C_{12}^2(2+\sqrt{3})$ یا مح$_{12}$ $=11,196\times C_{12}^2$

جدول اضلاع و ارتفاعات و مساحت کثیرالاضلاعهای منتظم عمده

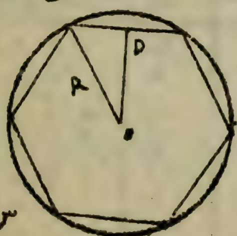
اشکال	اضلاع	ارتفاعات	مساحت بحسب اضلاع و شعاع دایره محیطیه
مربع	$C_4=R\sqrt{2}$	$a_4=\frac{R\sqrt{2}}{2}$	مح$_4$ $=2R^2$
مثلث متساوی الاضلاع	$C_3=R\sqrt{3}$	$a_3=\frac{R}{2}$	مح$_3$ $=\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}=1,299\cdots\times R^2$
مخمس	$C_5=\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$a_5=\frac{R}{4}(\sqrt{5}+1)$	مح$_5$ $=\frac{5R^2}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}}=2,377\cdots\times R^2$
مسدس	$C_6=R$	$a_6=\frac{R\sqrt{3}}{2}$	مح$_6$ $=\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}=2,598\cdots\times R^2$
مثمن	$C_8=R\sqrt{2+\sqrt{2}}$	$a_8=\frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$	مح$_8$ $=2C^2(1+\sqrt{2})=2R^2\sqrt{2}=2,828\cdots\times R^2$
معشر	$C_{10}=\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$	$a_{10}=\frac{R}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	مح$_{10}$ $=\frac{5R^2}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}=2,938\cdots\times R^2$
۱۲ ضلعی	$C_{12}=R\sqrt{2-\sqrt{3}}$	$a_{12}=\frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$	مح$_{12}$ $=3R^2$

ثامناً ــ مساحت دایره

۴۱۸ ــ تعریف ــ سابق ذکر شد (فقره ۳۷۸) که محیط دایره حدّی است که بسمتش میل کند محیط کثیر الاضلاع منتظم محاطی یا محیطی وقتیکه عدد اضلاعش را بی اندازه مضاعف کنیم و همینطور گوئیم که سطح دایره نیز حدّی است که بسمتش میل کند سطح کثیر الاضلاع منتظم محاطی یا محیطی وقتیکه عدد اضلاعش بی اندازه متضاعف ترقّی کند

قضیّهٔ ۱۳

۴۱۹ ــ مساحت دایره مساویست با حاصل ضرب محیطش در نصف شعاع



ش ۲۹۴

برهان ــ کثیر الاضلاع منتظمی در دایره محاط میکنیم ش ۲۹۳ و فرض میکنیم P محیط این کثیر الاضلاع باشد و OD ارتفاعش پس مساحت چنین میشود $P \times \frac{OD}{2}$

و چون عدد اضلاع این کثیر الاضلاع را بی اندازه تضعیف کنیم محیطش P بی اندازه نزدیک میشود و میل میکند بسمتش C که محیط دایره است وضمناً ارتفاع OD نیز میل میکند بسمتش R که شعاع دایره است پس وقتیکه

عدد اضلاع کثیر الاضلاع منتظم محاطی بی اندازه تضاعیف ترقی کند مساحتش میل میکند بسمت حدی که عبارت است از $C \times \frac{R}{2}$ یعنی حاصل ضرب محیط دایره در نصف شعاع و این حد بنا بتعریف عبارتست از سطح دایره پس $S = C \times \frac{R}{2}$

وچون $C = 2\pi R$ (نمره) پس $S = 2\pi R \times \frac{R}{2}$ یا $S = \pi R^2$

پس مساحت دایره حاصل میشود از ضرب کردن مجذور شعاعش در عدد π

۴۲۰ — نتیجه — سطح دو دایره بیکدیگر بر نسبت مجذورات اشعه شان باشند

فرض میکنیم S و S' مساحت دو دایره باشند و R و R' دو شعاع آنها پس

$S = \pi R^2$ و $S' = \pi R'^2$ پس $\frac{S}{S'} = \frac{R^2}{R'^2}$

۴۲۱ — مثال ۱ — معلوم کنید مساحت دایره که بقطر ۳ متر باشد

$S = \pi R^2 = \pi \times 1{,}5^2 = 7{,}0650$ متر مربع

مثال ۲ — معلوم کنید شعاع دایره که مساحتش ۰٫۸۵ متر مربع باشد

$R = \sqrt{\frac{S}{\pi}} = \sqrt{\frac{0{,}850}{\pi}} = \sqrt{0{,}027} = 0{,}016$

مثال ۳ — معلوم کنید مساحت دایره که محیطش طول ۵٫۴ متر باشد

چون در $S = \pi R^2$ بجای R^2 مقدارش $\frac{C^2}{4\pi^2}$ را قرار دهیم چنین میشود

$S = \frac{C^2}{4\pi}$ پس $S = \frac{5{,}4^2}{4\pi} = 2{,}3204$ متر مربع

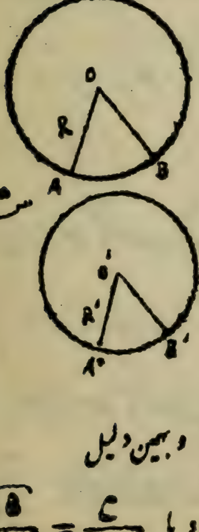
تتمه ـ مساحت قطاع دایره

۲۲۲ ـ **تعریف** ـ قطاع دایره جزئی است از سطح دایره محصور مابین یک قوس و دو شعاع که منتهی شوند بطرفین آن قوس مانند قطاع OAB (ش ۲۹۵)

۲۲۳ ـ دو قوس را متشابه گوئیم وقتیکه مقابل باشند بدو زاویهٔ مرکزیهٔ متساویه و همچنین دو قطاع را متشابه گوئیم وقتیکه دو زاویهٔ مرکزیهٔ مقابلشان متساوی باشند

قضیهٔ ۱۴

۲۲۴ ـ دو قوس متشابهه بر نسبت دو شعاع باشند و دو قطاع متشابه بر نسبت دو مجذور دو شعاع



ش ۲۹۵

فرض میکنیم در دو دایرهٔ O و O' دو قوس AB و A'B' متشابه باشند و C و C' دو محیط این دو دایره باشند و R و R' دو شعاع آنها ـ اولاً در یک دایره دو قوس بر نسبت دو زاویهٔ مرکزیه باشند ش ۲۹۵ پس نسبت قوس AB بمحیط دایرهٔ C مثل نسبت زاویهٔ مرکزیه O است به ۴ قائمه پس $\frac{\widehat{AB}}{C} = \frac{\hat{O}}{4}$ و بهمین دلیل

$\frac{\widehat{A'B'}}{C'} = \frac{\hat{O'}}{4}$ و چون $\hat{O} = \hat{O'}$ پس $\frac{\widehat{AB}}{C} = \frac{\widehat{A'B'}}{C'}$ و یا $\frac{\widehat{AB}}{\widehat{A'B'}} = \frac{C}{C'}$

و اما از طرف دیگر $\frac{C}{C'} = \frac{R}{R'}$ پس $\frac{AB}{A'B'} = \frac{C}{C'} = \frac{R}{R'}$

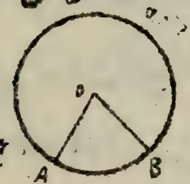
ثانیاً فرض میکنیم دو قطاع AOB و A'O'B' متشابه باشند و چون دو سطح دو دایره را نیز به س و س' بنمائیم چنین خواهیم داشت $\frac{AOB}{س} = \frac{\hat{O}}{4}$ و $\frac{A'O'B'}{س'} = \frac{\hat{O'}}{4}$

و چون $\hat{O} = \hat{O'}$ پس $\frac{AOB}{س} = \frac{A'O'B'}{س'}$ یا $\frac{AOB}{A'O'B'} = \frac{س}{س'}$ و اما از طرف دیگر

$\frac{س}{س'} = \frac{R^2}{R'^2}$ پس $\frac{AOB}{A'O'B'} = \frac{س}{س'} = \frac{R^2}{R'^2}$

قضیهٔ ۱۵

۲۲۵ـ مساحت قطاع دایره مساویست با حاصل ضرب طول قوسش در نصف شعاع ـ فرض میکنیم R شعاع و س سطح دایره باشند ش ۲۹۶ و ل طول قوس قطاع AOB باشد چون دو قطاع در یک دایره بر نسبت دو زاویهٔ مرکزیه باشند و هم بر نسبت دو قوسشان پس $\frac{AOB}{س} = \frac{\hat{O}}{4} = \frac{l}{2\pi R}$ و از آنجا



۲۹۶

$AOB = \frac{س \times l}{2\pi R} = \frac{\pi R^2 l}{2\pi R}$ یا $AOB = \frac{l \times R}{2}$

۲۲۶ـ تبصرهٔ ۱ ــ این حکم نیز محقق است که مساحت قطاع مساویست با حاصل ضرب سطح دایره در نسبت عدد درجات قوسش به ۳۶۰

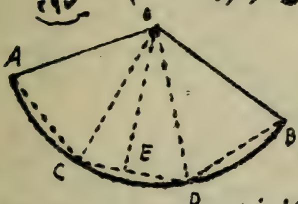
زیرا که چون عدد درجات زاویهٔ قطاع AOB را n فرض کنیم چنین

خواهیم داشت $\frac{m}{360} = \frac{AOB}{\text{کمه}}$ و از آنجا $AOB = \text{کمه} \times \frac{m}{360}$

$$AOB = \pi R^2 \times \frac{m}{360} = \frac{\pi R^2 m}{360}$$

و این دو دستور $AOB = \frac{l \times R}{2}$ و $AOB = \frac{\pi R^2 m}{360}$ از روی یکدیگر

استخراج میشوند چونکه $l = \frac{\pi R m}{180}$ (نمرهٔ ۲۹۲ ص)



۴۲۷ — تبصرهٔ ۲ — قضیهٔ سابقه را بوجه ذیل نیز میتوان مبرهن نمود — قطاع AOB مفروض است ص ۲۹۷ در قوس AB قطعه خط منکسر منظم ACDB را محاط میکنیم مساحت قطاع کثیر الاضلاع OACDB مساویست با حاصل ضرب محیط ACDB در نصف ارتفاعش OE و چون عدد اضلاع خط منکسر محاطی را بی اندازه مضاعف کنیم میرسد بحدش که قوس AB باشد و حد ارتفاع OE نیز شعاع است R پس حد سطح قطاع کثیر الاضلاع منظم محاطی چنین میشود $AB \times \frac{R}{2}$ و این حد عبارتست از مساحت قطاع دایره پس $AOB = AB \times \frac{R}{2}$ و چون قوس AB را l فرض کنیم دستور کلی چنین میشود $\text{کمه} = \frac{l \times R}{2}$

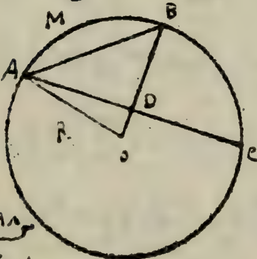
۴۲۸ — مثال — مطلوبست مساحت قطاعی که قوسش ۳۸ درجه و ۴۴ دقیقه باشد و شعاعش ۲٫۴ متر — $\text{کمه} = \frac{\pi R^2 m}{360} = \frac{\pi \times 2{,}4^2 \times 2344}{21600} = 1{,}9006$ متر مربع

عاشراً ـ مساحت قطعهٔ دایره

۴۲۹ ـ **تعریف** ـ قطعهٔ دایره جزئی است از سطحش محصور مابین قوس و وَتَر و وتر همواره مقابل است بدو قوس و بنابراین بدو قطعه ولی مقصود قطعه کوچکتر است مگر آنکه قید شود

قضیّه ۶۱

۴۳۰ ـ **مساحت قطعه دایره که کوچکتر از نصف دایره باشد مساویست با حاصل ضرب نصف شعاع در فضل قوسش بر نصف وترِ مضاعف آن قوس**



ش ۲۹۸

ساحت قطعه AMB که کوچکتر است از نصف دایره مساویست با فضل مساحت قطاع OAMB بر مساحت مثلث AOB پس مساحت این دو سطح را معلوم میکنیم مساحت قطاع OAMB مساویست با حاصل ضرب قوسش در نصف شعاع R یعنی $OAMB = \widehat{AMB} \times \frac{R}{2}$

و مساحت مثلث AOB بنابرآنکه قاعده اش OB باشد مساویست با حاصل ضرب $\frac{OB}{2}$ در ارتفاعش AD که عبارتست از نصف AC وترِ مضاعفِ قوس AB پس مساحت مثلث چنین شود $AOB = \frac{OB}{2} \times AD = \frac{R}{2} \times \frac{AC}{2}$ پس مساحت

قطعهٔ دایره AMB چنین شود $\frac{R}{2}\times AMB - \frac{R}{2}\times\frac{AC}{2}$ = قم و یا $\frac{R}{2}\times\left(AMB-\frac{AC}{2}\right)$ = قم

۴۲۱- تبصره — باید ملتفت بود که مساحت قطعه ANB که بزرگتر از نصف دایره است مساویست با مجموع مساحت قطاع OANB و مثلث AOB در اینصورت میتوان مساحت قطعه AMB متمم آن را که از نصف دایره کوچکتر است معلوم نمود و آن را از تمام مساحت دایره کم کرد تا مساحت قطعه ANB بدست آید و باید این نکته را نیز ملتفت بود که مساحت مثلث AOB را بحسب درجات قطاع نمیتوان تعبیر کرد مگر بوسیلهٔ علم مثلثات و اما بطریق هندسی نیز ممکن است در صورتیکه قوسهای قطعات مفروضه نصف قوسهای موتر باضلاع کثیرالاضلاعهای منتظمهٔ محاطیه باشند که بتوان آنها را بسهولت استخراج نمود از قبیل مربع و مثلث متساوی الاضلاع و مسدس وغیره

۴۲۲- مثال — مطلوبست مساحت قطعهٔ دایره که قوسش ۴۵ درجه باشد و شعاعش ۲ متر — طول قوس ۴۵ که ثمن محیط دایره است مساویست با $\frac{2\pi R}{8}$ یا $\frac{\pi R}{4}$ و وتر دو قوس مضاعف عبارتست از ضلع مربع محاطی و آن مساویست با $R\sqrt{2}$ پس چنین خواهیم داشت

$$\frac{R}{2}\left(\frac{\pi R}{4}-\frac{R\sqrt{2}}{2}\right) = \text{قم}$$

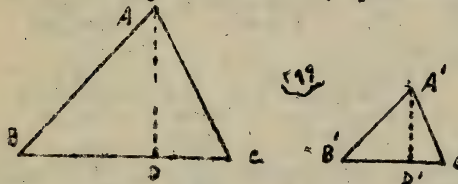
$$= \frac{R^2}{8}\left(\pi - 2\sqrt{2}\right) = \frac{2^2}{8}\left(\pi - 2\sqrt{2}\right) = 0.3524 \text{ متر مربع}$$

۴ ــ مقایسهٔ سطوح

قضیّهٔ ۱۷

۲۲۳ ــ مساحت دو مثلّث متشابه بر نسبت دو مربّع هر دو ضلع متناظره باشند

۲۹۹



برهان ــ فرض میکنیم

دو مثلّث ABC و A'B'C' متشابه باشند از تشابه این دو مثلّث این تساوی

حاصل میشود $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}$ دو مثلّث قائم الزاویه BAD و B'A'D' نیز متشابهند

چونکه یک زاویهٔ حادّهٔ آنها مساوی ($\hat{B}=\hat{B'}$) پس این تساوی حاصل میشود

$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AD}{A'D'}$ و چون این دو تساوی را عضو بعضو در یکدیگر ضرب کنیم چنین میشود

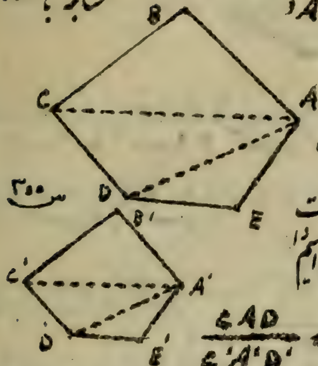
$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}=\frac{BC\times AD}{B'C'\times A'D'}$ و امّا BC×AD عبارتست از مضاعف مثلّث اوّل

و B'C'×A'D' مضاعف مثلّث ثانی است پس $\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}=\frac{2ABC}{2A'B'C'}$

ویا $\frac{ABC}{A'B'C'}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}$

قضیّهٔ ۱۸

۲۲۴ ــ مساحت دو کثیر الاضلاع متشابه بر نسبت دو مربّع هر دو ضلع متناظر باشند



برهان — فرض میکنیم دو کثیرالاضلاع $ABCDE$ و $A'B'C'D'E'$ متشابه باشند (شکل ۳۵۰)

چون اقطار AC و AD و $A'C'$ و $A'D'$ را رسم کنیم این دو کثیرالاضلاع تجزیه میشوند بمثلثات متشابه و متشابه الوضع پس بنابر قضیهٔ سابقه چنین خواهیم داشت

$$\frac{CAD}{C'A'D'} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{A'C'}^2} = \frac{\overline{AD}^2}{\overline{A'D'}^2} \text{ و } \frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{A'C'}^2}$$

پس بسبب اشتراک نسب متساویه چنین حاصل میشود $\frac{ADE}{A'D'E'} = \frac{\overline{AD}^2}{\overline{A'D'}^2}$

و از ترکیب این نسب متساویه چنین خواهیم داشت $\frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{ADC}{A'D'C'} = \frac{ADE}{A'D'E'}$

یعنی نسبت مجموع صور که مساحت کثیرالاضلاع

$$\frac{ABC + ADC + ADE}{A'B'C' + A'D'C' + A'D'E'} = \frac{ABC}{A'B'C'}$$

اول باشد بمجموع مخارج که مساحت کثیرالاضلاع ثانی باشد مثل یکی از صور است بمخرج خود پس

$$\frac{ABCDE}{A'B'C'D'E'} = \frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2} \text{ و یا } \frac{ABCDE}{A'B'C'D'E'} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}$$

۴۲۵ — تبصرهٔ ۱ — نسبت $\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}$ را میتوان چنین نوشت $\left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2$ پس حکم قضیهٔ سابقه را میتوان باین عبارت ادا نمود که نسبت مساحت دو کثیرالاضلاع متشابه مساویست بمجذور (یا مربع) نسبت تشابه آنها

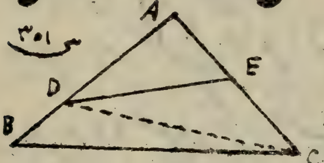
۴۲۶ — تبصرهٔ ۲ — مساحت هر دو کثیرالاضلاع متشابه متناسبند بامربعات اقطار متناظر شان زیراکه این اقطار متناسبند با اضلاع

۴۳۷- نتیجه - مساحت دو کثیر الاضلاع منتظمه متشابه بر نسبت مربعات اشعه یا ارتفاعات باشند

قضیه ۱۹

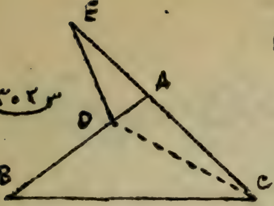
۴۳۸- هر دو مثلث که دارای یک زاویه مساوی باشند با کمال نسبتشان بیکدیگر مثل حاصل ضربهای اضلاعی است که حاوی آن زاویه اند

شکل ۳۰۱



هرگاه دو مثلث دارای یک زاویه مساوی باشند همواره میتوان آن دو مثلث را چنان بر یکدیگر قرار داد که دو زاویه متساویه برهم منطبق گردند و مشترک باشند بنابراین فرض دو مثلث ABC و ADE در زاویه A مشترک باشند خط DC را وصل میکنیم آنوقت دو مثلث ADE و ADC در راس D مشترکند و برارتفاع واحدند پس بر نسبت دو قاعده AE و AC باشند یعنی $\frac{ADE}{ADC}=\frac{AE}{AC}$ و همچنین دو مثلث ADC و ABC در راس C مشترکند و برارتفاع واحد پس بر نسبت دو قاعده AD و AB باشند یعنی $\frac{ADC}{ABC}=\frac{AD}{AB}$ و چون این دو تساوی را عضو بعضو در یکدیگر ضرب کنیم و عامل مشترک ADC را حذف کنیم چنین حاصل شود

$$\frac{ADE}{ABC}=\frac{AE\times AD}{AC\times AB}$$



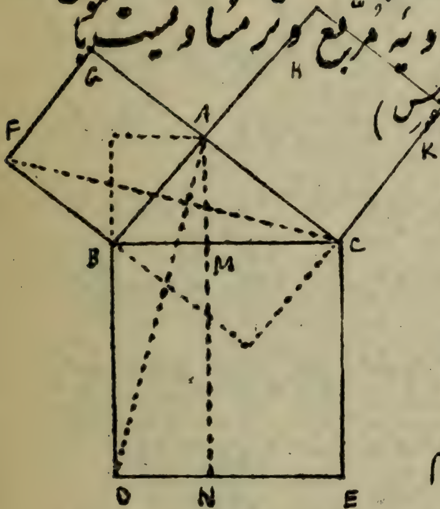
س ۳۰۲

و اگر در دو مثلث ABC و ADE دو زاویهٔ $\widehat{BAC}$ و $\widehat{EAD}$ مکمل باشند

آن دو مثلث را پهلوی یکدیگر چنان قرار میدهیم که دو زاویهٔ مکمل مجاور باشند و خط DC را وصل میکنیم و دلیل سابق را عیناً تکرار مینمائیم

قضیهٔ ۲۰

۲۳۹ — در مثلث قائم الزاویه مربع وتر مساویست با مجموع دو مربع دو ضلع دیگر (قضیهٔ فیثاغورس)



س ۳۰۳

برهان — بر سه ضلع مثلث قائم الزاویه ABC مربعات BCED و ABFG و ACKH را رسم میکنیم و AN را بر BC و DE عمود میکنیم پس مربع BCED منقسم شود بدو مستطیل BMND و CMNB که بترتیب معادلند با دو مربع ABFG و ACKH

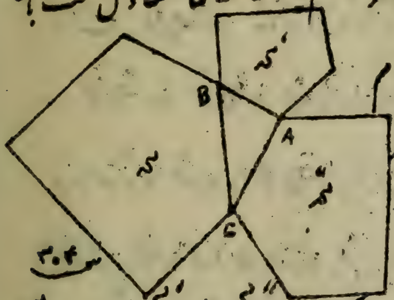
برهان — چون دو خط AD و FC را رسم کنیم دو مثلث BAD و BFC متساوی میشوند زیرا که در دو ضلع و زاویهٔ بینهما متساوی هستند یعنی زاویهٔ $\widehat{ABD}$

مرکب از مجموع زاویه ABC و زاویهٔ قائمهٔ CBD مساویست با زاویهٔ FBC
مرکب از همان زاویهٔ ABC و زاویهٔ قائمهٔ FBA و علاوه براین
BF = BA و BD = BC و اما مثلث ABD و مستطیل BMND
بر قاعدهٔ واحده BD و بر ارتفاع واحد BM باشند پس مثلث ABD نصف
مستطیل BMND است و همچنین مثلث BFC و مربع ABFG بر قاعدهٔ
واحدهٔ BF و بر ارتفاع واحد AB باشند پس مثلث BFC نصف مربع
ABFG است و چون دو مثلث ABD و BFC مساوی هستند پس مستطیل
BMND که مضاعف مثلث ABD است معادل شود با مربع ABFG
که مضاعف مثلث BFC است

و بهمین وجه ثابت میکنیم که مستطیل MCEN معادل است با مربع ACKH
پس مربع BCED که مجموع دو مستطیل BMND و MCEN است معادل است
با مجموع دو مربع ABFG و ACKH بعبارهٔ اخری مربع مرسوم بر وتر
BC مساویست با مجموع دو مربع مرسوم بر دو ضلع دیگر AB و AC فهو المطلوب

۲۴۰ — تبصره — این قضیه در هندسه بوجوه اصلیهٔ عدیده مبرهن شده و ما
اکتفا کردیم بذکر آنوجهی که بیشتر شایع است

۴۴۱- نتیجهٔ ۱- چون بر سه ضلع مثلث قائم الزاویه ABC سه کثیرالاضلاع متشابه رسم کنیم ش ۳۰۴ کثیرالاضلاع سه مرسوم بر وتر BC معادل است با مجموع دو کثیرالاضلاع دیگر $\text{سه}'$ و $\text{سه}''$ مرسوم بر دو ضلع دیگر AB و AC زیرا که نظر بتشابه این سه شکل چنین خواهیم داشت



ش ۳۰۴

$$\frac{\text{سه}}{\overline{BC}^2}=\frac{\text{سه}'}{\overline{AB}^2}=\frac{\text{سه}''}{\overline{AC}^2}$$

و از آنجا

$$\frac{\text{سه}}{\overline{BC}^2}=\frac{\text{سه}'+\text{سه}''}{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2}$$

و چون $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$ پس

$$\text{سه}=\text{سه}'+\text{سه}''$$

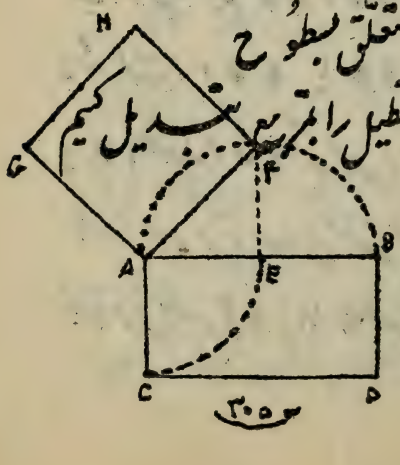
۴۴۲- نتیجهٔ ۲- مربعات مرسومه بر سه ضلع مثلث قائم الزاویه متناسب باشند با تصویرهای این اضلاع بر وتر زیرا اگر عوض دو مربع ABFG و ACKH معادلشان دو مستطیل DBMN و MNEC را اختیار کنیم سه مستطیل خواهیم داشت که بارتفاع واحد BD و بر نسبت قواعدشان BM و MC و BC باشند

۴۴۳- تبصره — هرگاه مربع مرسوم بر واحد طول را واحد سطح فرض کنیم آنوقت مجذور عددی که طول قطعهٔ خط مفروضی باشد عبارت خواهد بود از مساحت مربعی که بر آن قطعه خط رسم شود و همچنین حاصل ضرب دو عدد که اندازهٔ طولهای دو قطعهٔ خط باشند عبارت خواهد بود از مساحت مستطیلی

که براین دو قطعه خط رسم شود مثلاً در حقیقت تعادل مستطیل BMND و مربع ABFG عبارتست از تعبیر این تساوی $\overline{AB}^2 = BC \times BM$ و بنابراین مقدمه جمیع روابط عددیه که مابین اجزای مثلث در نمره های (۳۱۴ و ۳۱۷ و ۳۲۲ و ۳۲۳) نظر بتشابه مثلثات ببرهان رسیده ایم مستقیماً از روی مقایسه و تعادل سطوح نتیجه میشوند مثلاً از اینکه در مثلث قائم الزاویه مجذور وتر مساویست با مجموع دو مجذور دو ضلع دیگر چنین نتیجه میشود که مساحت مربع مرسوم بر وتر معادل است با مجموع مساحت دو مربع مرسوم بر دو ضلع دیگر زیراکه بنابر مقدمه مذکوره مساحت مربعات BCED و ABFG و ACKH مرتباً باعداد a^2 و b^2 و c^2 که مجذورات اضلاع مثلث قائم الزاویه ABC باشند تعبیر میشوند

مسائل و ترسیمات متعلق بسطوح

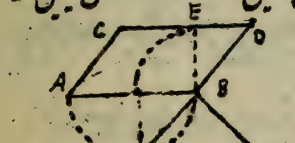
۴۴۴- مسئله ۱- میخواهیم مستطیل را بمربع تبدیل کنیم



ABCD مستطیل مفروض است ش ۳۰۵ و x ضلع مربع مطلوب پس باید چنین داشت $x^2 = AB \times AC$ یعنی x

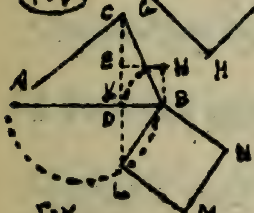
واسطه هندسی است بین قاعده و ارتفاع مستطیل پس از ضلع AB طول AE را مساوی AC جدا میکنیم و بر AB نیم دایره رسم میکنیم و EF را بر AB عمود میکنیم پس وتر AF ضلع مربع مطلوب باشد زیرا $\overline{AF}^2 = AB \times AE = AB \times AC$ پس مربع مرسوم بر AF معادلست با مستطیل مفروض

۴۲۵ — تبصره — بهمین حل میتوان متوازی الاضلاع و مثلث و ذوذنقه را بمربع تبدیل نمود و در تمام حالات چیزیست بین دو طول معین واسطه هندسی تعیین کرد



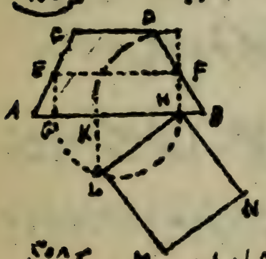
ش ۳۰۶

اوّلاً فرض میکنیم AB قاعدهٔ متوازی الاضلاع ABCD باشد و BE یا BF ارتفاع آن پس BG ضلع مربع معادل متوازی الاضلاع مفروض خواهد بود



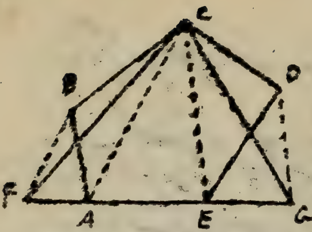
ش ۳۰۷

ثانیاً فرض میکنیم AB قاعدهٔ مثلث ABC باشد ش ۳۰۷ و ED یا BH یا BK نصف ارتفاع آن پس وتر BL ضلع مربع معادل مثلث مفروض خواهد بود



ش ۳۰۸

ثالثاً فرض میکنیم EF یا GH نصف مجموع دو قاعدهٔ ذوذنقه ABCD باشد



س ۳۰۹

س ۳۰۸ و FH یا KH ارتفاع آن پس LH ما
ضلع مربع معادل و ذوذنقه مفروض خواهد بود

۴۴۶ - مسئله ۲ - میخواهیم کثیر الاضلاعی را بمثلث معادل تبدیل کنیم

کثیر الاضلاع ABCDE مفروض است
قطر CA را وصل میکنیم و از نقطه B
خط BF را بموازات CA رسم میکنیم تا امتداد EA را قطع کند و بعد از نقطه C
به F وصل میکنیم دو مثلث CBA و CFA در قاعدهٔ AC مشترکند و رؤسشان
B و F واقعند بر خط BF که بموازی قاعده است پس این دو مثلث معادلند و
چون مثلث CBA را بدل کنیم بمثلث CFA کثیر الاضلاع FCDE معادل
شود با کثیر الاضلاع ABCDE و یک ضلع کمتر دارد زیرا که AF بر
استقامت EA است و همینطور مثلث CDE را تبدیل کنیم بمثلث
CGE پس مثلث FCG معادل شود با ذو اربعة اضلاع FCDE
و بعد با کثیر الاضلاع ABCDE

۴۴۷ - مسئله ۳ - میخواهیم کثیر الاضلاعی را بمربع تبدیل کنیم

ابتدا کثیر الاضلاع مفروض را بمثلث معادل تبدیل میکنیم و بعد مثلث را بمربع

۲۲۸- مسئله ۴- میخواهیم کثیر الاضلاع منتظمی را بمربع تبدیل کنیم

چون مساحت کثیر الاضلاع منتظم مساویست با حاصل ضرب محیطش در نصف ارتفاع
پس باید مابین خط مستقیمی که مساوی محیط کثیر الاضلاع باشد و نصف ارتفاع
و یا مابین نصف محیط و ارتفاع واسطهٔ هندسی تعیین کرد

۲۲۹- مسئله ۵- میخواهیم دایره را بمربع تبدیل کنیم

(تبدیل دایره بمربع را تربیع دایره گویند)

این مسئله راجع میشود به تعیین واسطهٔ هندسی مابین محیط دایره و نصف شعاع
و ما قبلاً میدانیم که این مسئله بواسطهٔ حساب نتواند حل شود چونکه نسبت محیط دایره
بقطر یا محیط بشعاع عددی است اصم و بنابراین مقدار عددیهٔ طول دایره را
بحسب شعاع نمیتوان بطور صحیح بدست آورد معذلک این مسئله قاعدهٔ
ترسیمی لاینحل نیست زیرا که در هندسه خطوطی ترسیم میشوند که مقادیر
عددیهٔ آنها شامل اعداد اصم باشند مانند قطر مربع که مساوی است با
$a\sqrt{2}$ و ضلع مربع محاطی که این است $R\sqrt{2}$ و هکذا واما
تا امروز هیچ جواب ترسیمی از برای حل این مسئله بدست نیامده اگرچه

عدم امکان آن ثابت نشده باشد

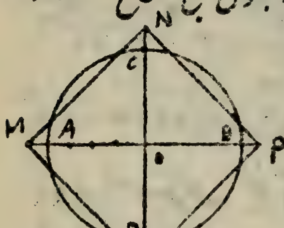
و بر خلاف در عملیات چند طریق برای تربیع تقریبی دایره موجود است

اولاً ـ مابین نصف شعاع و خطی مساوی $\frac{۲۲}{۷}$ قطر که محسوساً مساوی محیط دایره باشد

واسطه هندسی تعیین میکنیم مربع مرسوم بر این خط محسوساً معادل مساحت دایره خواهد بود

ثانیاً ـ در دایره O دو قطر AB و CD را بر یکدیگر عمود میکنیم و شعاع OA را

بر چهار جزء متساویه قسمت میکنیم و اطراف دو قطر را بطول ربع شعاع امتداد



شکل ۳۱۰

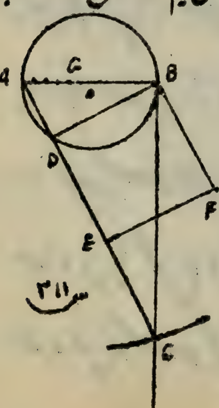
میدهیم و مابین نقاطی که بدست آمده دو بدو

وصل کنیم مربعی تشکیل میشود که محسوساً معادل

دایره است و این تقریب در عملیات کافی است

ثالثاً ـ طریقی که تونشت مهندس بدست آورده آنست که در دایره O شکل ۳۱۱

قطر AB را رسم کنیم و از نقطه B خطی بر دایره مماس کنیم و شعاع OA را به چهار جزء



شکل ۳۱۱

متساویه قسمت کنیم و قسمت اول G را مرکز قرار داده

بشعاع مضاعف قطر AB قوسی رسم کنیم که خط مماس را

در نقطه C قطع کند و از نقطه A به C وصل کنیم پس وتر

DB خیلی بتقریب ضلع مربع معادل دایره خواهد بود

برهان — نظر بتشابه دو مثلث قائم الزاویه ABD و ABC چنین خواهیم داشت

$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{BC}$ و از آنجا $\overline{BD}^2=\frac{\overline{AB}^2\times\overline{BC}^2}{\overline{AC}^2}$ (۱) و چون

$$\overline{BC}^2=\overline{GC}^2-\overline{BG}^2=4\overline{AB}^2-\frac{49\overline{AB}^2}{144}=\frac{527\overline{AB}^2}{144}$$

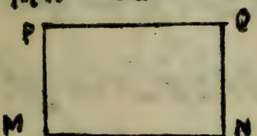
$$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\frac{527\overline{AB}^2}{144}=\frac{671\overline{AB}^2}{144}$$

و چون در تساوی (۱) بجای $\overline{BC}^2$ و $\overline{AC}^2$ مقادیرشان را قرار دهیم چنین میشود

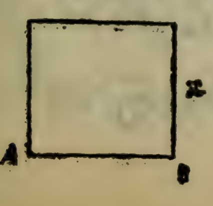
$\overline{BD}^2=\frac{\overline{AB}^2\times\frac{527\overline{AB}^2}{144}}{\frac{671\overline{AB}^2}{144}}=\frac{527\overline{AB}^2}{671}$ چون $AB=2R$ پس

$$\overline{BD}^2=\frac{4\times527}{671}\times R^2=\frac{2108}{671}\times R^2=3,14150\ldots\times R^2$$

۴۵۰ — مسئله ۶ — میخواهیم بر خط مفروض مستطیلی معادل مستطیل مفروضی رسم کنیم — یعنی ارتفاع مستطیلی را معلوم کنیم که قاعده‌اش AB باشد و معادل مستطیل MNPQ چون ارتفاع مطلوب را x فرض کنیم چنین خواهیم داشت $AB\times x=MN\times MP$ یا $\frac{AB}{MN}=\frac{MP}{x}$ پس x چهارم تناسب ما بین سه خط AB و MN و MP است



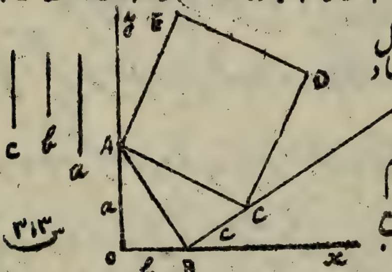
۴۵۱ — مسئله ۷ — میخواهیم مربعی معادل با مجموع دو یا چند مربع مفروض رسم کنیم



۳۱۲

فرض میکنیم a و b و c اضلاع سه مربع مفروض باشند دو خط غیر معین ox و oy را بزاویهٔ قائمه رسم میکنیم شکل ٣١٣ و بعد از خط اول oA را مساوی a جدا میکنیم و از خط ثانی طول oB را مساوی b و AB را وصل میکنیم این خط ضلع مربع معادل با مجموع مربع مفروض اول خواهد بود زیرا که $\overline{AB}^2=\overline{Ao}^2+\overline{Bo}^2=a^2+b^2$

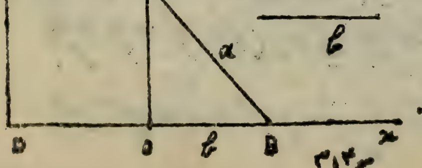
و برای ترسیم مربعی معادل با مجموع سه مربع مفروض از نقطهٔ B عمودی بر AB رسم کنیم و از این عمود طول BC را مساوی c جدا میکنیم پس خط AC ضلع مربع مطلوب باشد زیرا که $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{oA}^2+\overline{oB}^2+\overline{BC}^2=a^2+b^2+c^2$



شکل ٣١٣

٤٥٢ — مسئله ٨ — میخواهیم مربعی معادل با تفاضل دو مربع مفروض رسم کنیم

فرض میکنیم a و b اضلاع دو مربع مفروض باشند شکل ٣١٤ دو خط ox و oy را بزاویهٔ قائمه رسم میکنیم و از نقطهٔ B بشعاع a قوسی رسم میکنیم که oy را بر نقطهٔ A قطع کند پس مربع $ACDo$ که بر oA رسم شود مربع مطلوب باشد زیرا که $\overline{oA}^2=\overline{BA}^2-\overline{oB}^2=a^2-b^2$



شکل ٣١٤

٤٥٣ — مسئله ٩ — دو چند کثیرالاضلاع متشابه مفروض است میخواهیم کثیرالاضلاعی شبا

آنها رسم کنیم که مساحتش مساوی باشد با مجموع مساحت آنها

فرض میکنیم سه و سه' و سه'' سطح سه کثیر الاضلاع مفروض باشند و X سطح کثیر الاضلاع مطلوب و a و a' و a'' اضلاع متناظره آنها و x ضلع کثیر الاضلاع مطلوب نظیر باضلاع a و a' و a'' باشد پس چنین خواهیم داشت

$\frac{X}{x^2}=\frac{\text{سه}''}{a''^2}=\frac{\text{سه}'}{a'^2}=\frac{\text{سه}}{a^2}$ و از آنجا $\frac{X}{x^2}=\frac{\text{سه}''+\text{سه}'+\text{سه}}{a''^2+a'^2+a^2}$ و چون بفرض باید $X=\text{سه}''+\text{سه}'+\text{سه}$ پس $x^2=a''^2+a'^2+a^2$ بنابراین x ضلع مربعی است معادل با مجموع سه مربع (نمره ۴۵۱) پس باید بر ضلع x کثیر الاضلاعی شبیه یکی از کثیر الاضلاعهای مفروضه رسم نمود

۴۵۴ - مسئله ۱۰ - دو کثیر الاضلاع متشابه مفروض است میخواهیم کثیر الاضلاعی متشابه آنها رسم کنیم که مساحتش مساوی باشد با تفاضل مساحت آنها

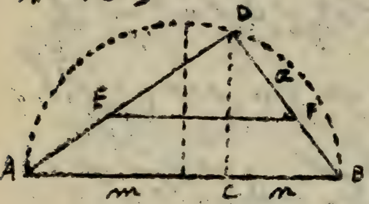
فرض میکنیم سه و سه' و X سطح کثیر الاضلاع متشابه باشند و a و a' و x اضلاع متناظره آنها پس چنین خواهیم داشت

$$\frac{\text{سه}}{a^2}=\frac{\text{سه}'}{a'^2}=\frac{X}{x^2}$$

و از آنجا $\frac{X}{x^2}=\frac{\text{سه}'-\text{سه}}{a'^2-a^2}$ و چون بفرض باید $X=\text{سه}'-\text{سه}$ پس $x^2=a'^2-a^2$ بنابراین x ضلع مربعی است معادل با تفاضل دو مربع (نمره ۴۵۲) پس بر ضلع x کثیر الاضلاعی شبیه یکی از دو کثیر الاضلاع مفروض رسم میکنیم

۲۵۵ـ مسئله ۱۱ـ میخواهیم مربعی رسم کنیم که نسبتش بمربع مفروض مثل نسبت دو عدد مفروض یا دو خط مفروض باشد

فرض میکنیم a ضلع مفروض باشد و m و n دو خط مفروض و برخط غیر معینی طول AC را مساوی m نقل میکنیم و CB را مساوی n و بر قطر AB نیم دایره رسم میکنیم و از نقطهٔ C عمود CD را اخراج میکنیم و دو وتر AB و DB را وصل میکنیم پس چنین خواهیم داشت



(۳۱۸)

$$\frac{\overline{DA}^2}{\overline{DB}^2} = \frac{AC}{CB} = \frac{m}{n}$$

وابتدا از نقطه D طول DF را مساوی ضلع مربع مفروض جدا میکنیم و از نقطه F خط EF را بموازات AB رسم میکنیم پس خط DE ضلع مربع مطلوب خواهد بود زیراکه چون

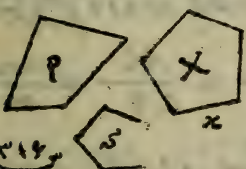
$$\frac{DE}{DF} = \frac{DA}{DB}$$ پس $$\frac{\overline{DE}^2}{\overline{DF}^2} = \frac{\overline{DA}^2}{\overline{DB}^2} = \frac{AC}{CB} = \frac{m}{n}$$ و چون

DF ضلع مربع مفروض است پس DE ضلع مربع مطلوب خواهد بود

۲۵۶ـ مسئله ۱۲ـ میخواهیم کثیرالاضلاعی مشابه کثیرالاضلاع مفروض رسم کنیم چنانچه نسبتش به کثیرالاضلاع مفروض مساوی نسبت $\frac{m}{n}$ باشد

فرض میکنیم که ک سطح کثیرالاضلاع مفروض باشد و a یکی از اضلاعش و X سطح کثیرالاضلاع مطلوب و x ضلع نظیر a و بنا بفرض چنین خواهیم داشت $\frac{X}{\text{ک}}=\frac{m}{n}$ و از طرف دیگر نظر بمشابه بودن کثیرالاضلاع چنین حاصل میشود $\frac{X}{\text{ک}}=\frac{x^2}{a^2}$ پس بسبب نسبت مشترک چنین خواهیم داشت $\frac{x^2}{a^2}=\frac{m}{n}$ پس x ضلع مربعی است که نسبتش بمربع مفروض a^2 مثل m باشد به n و آنرا بدستور مسئله سابق معلوم میکنیم و برآن کثیرالاضلاعی رسم کنیم مشابه کثیرالاضلاع مفروض

۲۵۷ — مسئله ۱۳ — میخواهیم کثیرالاضلاعی مشابه کثیرالاضلاع مفروضی رسم کنیم که معادل باشد با کثیرالاضلاع مفروض دیگر



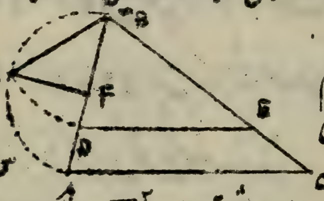
ش ۳۱۶

فرض میکنیم ک و پ و X سطح سه کثیرالاضلاع باشند بطوریکه X مشابه ک و معادل پ باشد و a یکی از اضلاع ک و x ضلع نظیرش از X پس بنا بفرض چنین خواهیم داشت $\frac{\text{ک}}{X}=\frac{a^2}{x^2}$ و چون X باید معادل پ باشد پس $\frac{\text{ک}}{\text{پ}}=\frac{a^2}{x^2}$ و حال فرض میکنیم m و n دو ضلع دو مربع باشند مرتباً معادل با ک و پ (نمره) پس چنین خواهیم داشت $\frac{m^2}{n^2}=\frac{a^2}{x^2}$ و از آنجا $\frac{a}{x}=\frac{m}{n}$ پس x چهارم تناسب مابین سه خط m و n و a خواهد بود

۴۵۸ — مسئله ۱۴ — میخواهیم مستطیلی رسم کنیم معادل با مربع مفروض بروجهی که مجموع دو ضلع مجاورش بطول معینی باشد و یا بعبارة اخری دو خط بدست آوریم که مجموعشان و واسطه هندسیشان معلوم باشد (مسئله ۸ نمره ۳۴۵)

۴۵۹ — مسئله ۱۵ — میخواهیم مستطیلی رسم کنیم معادل با مربع مفروض بروجهی که تفاضل دو ضلع مجاورش بطول معینی باشد و یا بعبارة اخری دو خط بدست آوریم که تفاضلشان و واسطه هندسیشان معلوم باشد (نمره ۳۴۶ مسئله ۹)

۴۶۰ — مسئله ۱۶ — میخواهیم مثلث را بخطی که بموازات یکی از اضلاعش رسم شود بدو جزء متعادل قسمت کنیم



ش ۳۱۷

فرض میکنیم مسئله حل شده و DE موازی مطلوب باشد پس ۳۱۷ نظر بتشابه مثلثات چنین خواهیم داشت

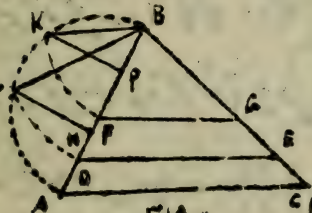
$$\frac{BDE}{BAC}=\frac{\overline{BD}^2}{\overline{BA}^2}$$

و از طرف دیگر بنا بفرض $\frac{BDE}{BAC}=\frac{1}{2}$ پس $\frac{\overline{BD}^2}{\overline{BA}^2}=\frac{1}{2}$ و باید ضلع مربعی بدست آورد که نسبتش بمربع معلومی مساوی $\frac{1}{2}$ باشد بنابراین بقطر AB نیم دایره رسم میکنیم و از نقطه F وسط AB عمود FK را رسم میکنیم و وتر BK را وصل میکنیم که مساوی است با DB پس کافی است که BK را بر AB نقل کنیم و از نقطه D خطی بموازات AC رسم کنیم

۱۶۴- مسئله ۱۷- میخواهیم مثلث را بخطوطی متوازیه با یکی از اضلاع باجزای متعادله و یا به نسبت اعداد مفروضه قسمت کنیم

اولاً فرض میکنیم که بخواهیم مثلث را بر سه جزء متعادله قسمت کنیم و m' و m'' سه مثلث متشابه باشند که از خطوط متوازیه GF و DE حاصل شده

پس $\frac{m''}{BA^2}=\frac{m'}{BD^2}=\frac{m}{BF^2}$ و بنا بفرض $\frac{m''}{3}=\frac{m'}{2}=\frac{m}{1}$ و از آنجا $\frac{BA^2}{3}=\frac{BD^2}{2}=\frac{BF^2}{1}$ و اما مربعات این سه خط متناسبند با تصاویرشان BP و BH و BA پس چنین خواهیم داشت $\frac{BA}{3}=\frac{BH}{2}=\frac{BP}{1}$ و از آنجا $BP = PH = HA$ پس راه حل مسئله بدست آمد که بقطر BA نیم دایره رسم کنیم



ص ۲۱۸

و این خط را بر سه جزء متساویه قسمت کنیم و از نقاط تقسیم P و H دو عمود اخراج کنیم و دو وتر BK و BM را وصل کنیم آنوقت چنین خواهیم داشت

$$\frac{BA^2}{BA}=\frac{BM^2}{BH}=\frac{BK^2}{BP} \quad \text{یا} \quad \frac{BA^2}{3}=\frac{BM^2}{2}=\frac{HK^2}{1}$$

پس کافیست که BK و BM را بر AB نقل کنیم و از دو نقطه F و D دو خط بموازات AC رسم کنیم تا مثلث ABC بر سه جزء متعادله قسمت شود

ثانیاً- فرض میکنیم که بخواهیم مثلث ABC را بر نسبت اعداد m و n و p

قسمت کنیم و این حالت را بطریق ذیل بحالت سابقه راجع میکنیم و تنها تقسیم منه

$\frac{BFG}{m}=\frac{FGDE}{n}=\frac{DEAC}{p}$ و از آنجا چنین حاصل میشود

$$\frac{BFG}{m}=\frac{BFG+FGDE}{m+n}=\frac{BFG+FGDE+DEAC}{m+n+p}$$

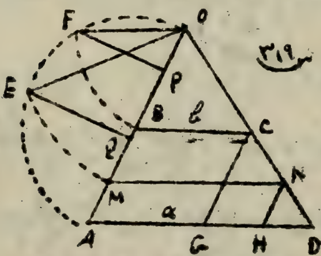
و از طرف دیگر $\frac{BFG}{m}=\frac{BDE}{m+n}=\frac{ABC}{m+n+p}$ و یا

$\frac{\overline{BF}^2}{m}=\frac{\overline{BD}^2}{m+n}=\frac{\overline{BA}^2}{m+n+p}$ پس $\frac{BFG}{\overline{BF}^2}=\frac{BDE}{\overline{BD}^2}=\frac{ABC}{\overline{BA}^2}$

و از اینجا راه حل مسئله بدست آمد که AB را بنسبت m و n و p

قسمت کنیم و عمل ترسیم را مانند حالت سابقه انجام دهیم

۴۶۲- مسئله ۱۸ - میخواهیم ذوذنقه را بخطی موازی با قاعدتین بدو جزء



ش ۳۱۹

متعادل قسمت کنیم

فرض میکنیم مسئله حل شده و در ذوذنقه

ABCD خط MN موازی مطلوب باشد

AB و DC را امتداد میدهیم تا در نقطه O متلاقی شوند و از تشابه سه مثلث OBC

و OMN و OAD چنین حاصل شود $\frac{OBC}{\overline{OB}^2}=\frac{OMN}{\overline{OM}^2}=\frac{OAD}{\overline{OA}^2}$ و بقطر OA نیم دایره

رسم میکنیم و از نقطه O قوسهای ME و BF را رسم میکنیم و دو عمود FP و EQ را

اخراج میکنیم تساوی فوق چنین میشود $\frac{OBC}{\overline{OF}^2}=\frac{OMN}{\overline{OE}^2}=\frac{OAD}{\overline{OA}^2}$ و اما مربعات و تار

OF و OE و OA متناسبند با تصاویرشان پس $\frac{OAD}{OA} = \frac{OMN}{OQ} = \frac{OBC}{OP}$

و از اینجا بواسطهٔ ترکیب نسب چنین نتیجه میشود $\frac{OAD - OMN}{OA - OQ} = \frac{OMN - OBC}{OQ - OP}$

یا $\frac{AMND}{AQ} = \frac{BCMN}{PQ}$ و چون بنا بفرض صور متساوی هستند پس مخارج نیز متساوی

میشوند و $AQ = PQ$ پس از اینجا راه حل مسئله بدست آمد که بقطر AO نیم دایره

رسم کنیم و وتر OF را مساوی OB رسم کنیم و نقطه F را بر P نقل کنیم و

AP را بدو جزء متساوی قسمت کنیم و از نقطه Q عمود QE را اخراج کنیم

و OE را بر OA نقل کنیم و از نقطه M خط MN را بموازات قاعدتین

AD و BC رسم کنیم پس این خط ذوذنقه را بدو جزء متعادله قسمت میکند

امثله (قضایا و مسائل)

۱ـ ثابت کنید هر کثیر الاضلاع محیطیه که متساوی الزوایا باشد منتظم است

۲ـ حساب کنید اضلاع و ارتفاعات کثیر الاضلاعهای ۲۰ ضلعی را بحسب شعاع

۳ـ حساب کنید اضلاع و اشعه کثیر الاضلاعهای منتظمهٔ ۳۰ ضلعی را بحسب ارتفاع

۴ـ تفاضل ما بین ضلع مخمس محاطی و ارتفاعش معلوم است میخواهیم شعاع دایره را رسم کنیم

۵ـ دو قطر مخمس منتظم که از یک رأس خارج نشوند یکدیگر را بنسبت ذات

و تساوی طرفین قسمت میکنند

۶- مربعی که ضلعش قطر مربع دیگر باشد مساحتش دو برابر آن مربع است

۷- چون اوساط اضلاع ذو اربعة اضلاعی را دو بدو وصل کنیم متوازی الاضلاعی تشکیل میشود معادل با نصف ذو اربعة اضلاع مفروض

۸- دو ذو اربعة اضلاع که دارای اقطار متساویه و متساوی المیل باشند متعادلند

۹- ذو اربعة اضلاعی که دو قطرش عمود بر یکدیگر باشند مساحتش مساوی با نصف حاصل ضرب دو قطرش

۱۰- چون بر سه ضلع مثلث قائم الزاویه مربعات رسم کنیم و رئوس مجاوره این سه مربع را دو بدو وصل کنیم مسدسی تشکیل میشود که مطلوبست مساحت آن

۱۱- میان مثلثاتی که بتوان با دو ضلع مفروض رسم نمود از همه اعظم کدام است

۱۲- میان جمیع مثلثات محاطیه که در قاعده مشترک باشند اعظم کدام است

۱۳- میان جمیع مثلثات محاطیه در یک دایره که دارای یک راس مشترک باشند اعظم کدام است

۱۴- میان جمیع مستطیلاتی که میتوان در یک دایره محاط نمود اعظم کدام است

۱۵ـ میخواهیم مثلث را بخطوط خارج از یک رأس باجزای متعادله قسمت کنیم

۱۶ـ میخواهیم ذوزنقه را بخطوط قاطع قاعدتین باجزای متعادله قسمت کنیم

۱۷ـ میخواهیم دایره مفروضی را بدوایر متحد المرکز باجزای متعادله قسمت کنیم

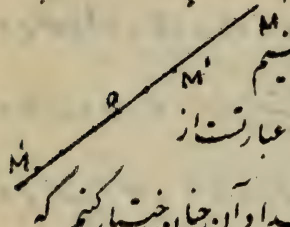
۱۸ـ میخواهیم بدستیاره و پرگار یک کثیر الاضلاع ۱۲ ضلعی منتظم رسم کنیم معادل با مثلثی که اضلاعش معلوم باشند

(کتبه قوام الکتّاب)

در مطبعه استاد فرخنده طبع سلیم حاج عبدالرحیم
بزیور طبع آراسته گردید

فی شهر ربیع الاول سنه ۱۳۲۴

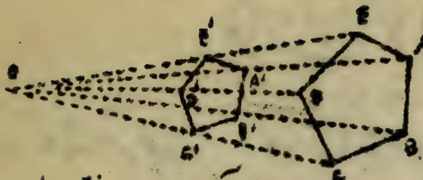
(مجانست اشکال)



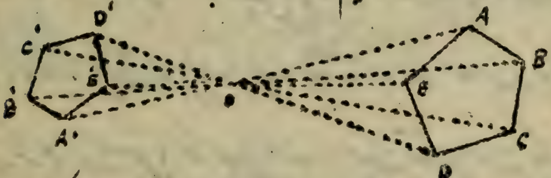
۱ ـ تعریف ـ هرگاه نقطهٔ ثابتهٔ O موسوم به مرکز مجانست و عدد ثابتی K موسوم به نسبت تجانس (یا نسبت تشابه) فرض کنیم و از نقطهٔ غیر مشخص M به O وصل کنیم نقطهٔ مجانس M عبارتست از نقطهٔ دیگر M' که ابتداء از O بر خود OM یا بر امتداد آن چنان اختیار کنیم که $\frac{OM'}{OM} = K$ و مجانست را مستقیم یا معکوس گوئیم بحسب آنکه نقطهٔ M' بر خود OM یا در امتداد آن گرفته شود و اگر نسبت تجانس مساوی واحد باشد دو نقطهٔ متجانسه بر هم منطبق شوند یا قرینه باشند بحسب آنکه مجانست مستقیم یا معکوس باشد و در حقیقت تقارن نسبت بیک نقطه حالت مخصوصی است از مجانست معکوسه کلیة دو شکل را متجانس گوئیم در صورتیکه جمیع نقاط نظایر آنها مجانس یکدیگر باشند

قضیه

۲ ـ چون از نقطهٔ ثابتهٔ O خطوطی بجمیع نقاط کثیر الاضلاع مفروضی وصل کنیم و ابتدا از این نقطه بر خود آنخطوط یا بر امتداد آنها طولهای متناسب با خطوط اول اختیار کنیم نقاط تقسیم عبارت باشند از رئوس کثیر الاضلاعی شبیه بکثیر الاضلاع مفروض و این دو کثیر الاضلاع را بنا بتعریف متجانس گوئیم و نقطهٔ O را مرکز تجانس مستقیم یا معکوس



مثلا چون از نقطهٔ ثابتهٔ O بر رؤس کثیر الاضلاع ABCDE وصل کنیم و بر خطوط OA و OB و OC و OD و OE و یا بر امتداد آنها نقاط A' و B' و C' و D' و E' را چنان اختیار کنیم که $K = \frac{OE'}{OE} = \frac{OD'}{OD} = \frac{OC'}{OC} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OA'}{OA}$ گوئیم کثیر الاضلاع A'B'C'D'E' شبیه است بکثیر الاضلاع ABCDE و این دو کثیر الاضلاع بنا بر تعریف متجانس مستقیم یا معکوس باشند



برهان - از روی رشتهٔ نسب متساویهٔ فوق بلا واسطه چنین نتیجه میشود که خط A'B' چون دو ضلع OA و OB از مثلث AOB را بر یک نسبت قسمت کند موازیست با AB (نمره ۲۸۳ و ۲۸۴) و همچنین A'E' موازیست با AE و هکذا سایر اضلاع متناظره بر متوازی باشند و زاویهٔ $\hat{A}$ مساویست با زاویهٔ $\hat{A'}$ چونکه اضلاعشان متوازی باشند و همچنین سایر زوایای متناظره نیز متشابهند و علاوه بر این از تشابه مثلثات متناظره OAB و OA'B' و همچنین OAE و OA'E' و غیره (چونکه دارای یک زاویهٔ مساوی و دو ضلع طرفین متناسبند) رشتهٔ نسب متساویهٔ ذیل حاصل شود $\frac{A'B'}{AB} = \frac{OB'}{OB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{OC'}{OC} = \frac{C'D'}{CD} \ldots = K$ بنا بر این در دو کثیر

الاضلاع ABCDE و A'B'C'D'E' چون زوایای متناظره متساوی است و اضلاع متناظره
متناسب پس این دو کثیر الاضلاع متشابهند
و در شکل اول اضلاع متناظره دو کثیر الاضلاع متوجه میشوند بیک جهة و در شکل ثانی اضلاع
متناظره متوجه میشوند در خلاف جهة

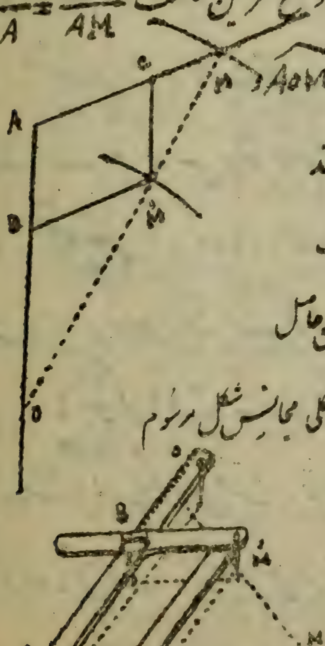
۳ - نتیجه ۱ - در دو شکل متجانسه دو قطعه خط واصل ما بین نقاط متناظره دو بدو متوازی
باشند و طولشان بر نسبت تجانس باشد و اگر تجانس مستقیم باشد آن دو خط متوازی شوند
و متوجه در یک جهة و اگر تجانس معکوس باشد متوازی شوند و متوجه در خلاف جهة

۴ - نتیجه ۲ - هرگاه سه نقطه بر استقامت یک خط باشند نظایرشان نیز بر استقامت
یک خط باشند کلیه مجانس هر خط مستقیم خطی است مستقیم موازی آن

۵ - نتیجه ۳ - دو زاویه متجانسه متساوی باشند و اضلاعشان متوازی و ممتد
در یک جهة یا در خلاف جهة بحسب آنکه مجانست مستقیم باشد یا معکوس

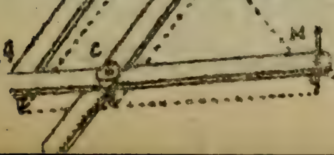
۶ - پانتوگراف - برای تحویل اشکال بصورت بزرگتر و کوچکتر آلات
متعدده متداول است که مبنای جمیعشان تجانس اشکال میباشد
پانتوگراف آلتی است بجهة ترسیم شکلی مجانس شکل مفروض بر نسبت معینی و آن اصلا مرکب
است از چهار میل یا ستاره OA و AM و B'M و CM که در نقاط A و B و C و

یعنی بهم اتصال داده‌اند و بعلاوه دارای این دو شرط است که شکل ABM'C متوازی الاضلاع باشد و سه نقطهٔ O و M و M' بر استقامت یک خط باشند مثلاً اگر فرض کنیم نقطهٔ O ثابت باشد و نقطهٔ M در سطح خود جابجا شود نقطهٔ M' در این حرکت دائماً با دو نقطهٔ O و M بر یک استقامت باشد و بعلاوه نسبت $\frac{OM'}{OM}$ ثابت است زیرا وقتیکه نقطهٔ M جابجا شود شکل ABM'C چون اضلاع متقابله‌اش متساوی است همواره متوازی الاضلاع است و دو زاویهٔ $\widehat{OBM'}$ و $\widehat{OAM}$ در هر لحظه متساوی باشند و در دو مثلث OBM' و OAM چون یک زاویه مساویست و دو ضلع طرفین متناسب $\frac{OB}{OA}=\frac{BM'}{AM}$



پس این دو مثلث متشابه یکدیگرند و $\widehat{AOM}=\widehat{BOM'}$

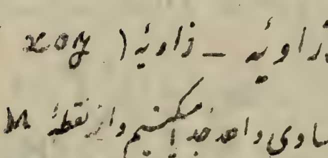
چون سه نقطهٔ A و B و O بر یک استقامتند پس سه نقطهٔ M و M' و O نیز بر استقامت یک خط باشند و بالاخره از تشابه مثلثات چنین حاصل میشود $K=\frac{BM'}{AM}=\frac{OB}{OA}=\frac{OM'}{OM}$ پس نقطهٔ M' شکلی مجانس شکل مرسوم بتوسط M رسم میکند و نسبت تجانس مساویست با $K=\frac{OB}{OA}$ و نقطهٔ O مرکز تجانس است و باید

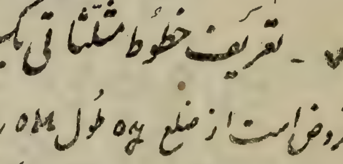


دانست که در عملیات مستعمله OA و AM

دارای تقسیماتست و در مفصل M' مداد وصل کنند و در روی این دو ستاره دو مهره نصب شده که میتوان آنها را با پیچ محکم و ثابت نمود یکی در O دارای سوزنی است که بر صفحه کاغذ نصب میشود و دیگری در M دارای نوک خشکی است که میتواند در روی خطی از سطح سیر کند و دو مهره را همواره میتوان چنان ثابت نمود که $\frac{OB}{OA}=\frac{AC}{AM}=K$
و اگر بخواهیم شکل مفروض را بزرگ کنیم مداد و نوک خشک را در M و M' تبدیل میکنیم و چون نوک خشک M' را در روی خطی از سطح سیر دهیم نقطه M خطی مجانس آن رسم میکند.

۷ - **تعریف خطوط مثلثاتی یک زاویه** - زاویه (xoy) مفروض است از ضلع oy طول OM را مساوی واحد جدا میکنیم و از نقطه M عمود MP را بر ضلع ox فرود می آوریم و گوئیم جیب زاویه $\widehat{xoy}$ عبارتست از طول قطعه خط $\overline{PM}$ که همواره مثبت است و آنرا مختصراً باین رمز مینمائیم $\sin(xoy)=\overline{PM}$ sinus (yox) تلفظ میشود





و جیب تمام زاویه (yox) عبارتست از مقدار جبری قطعه خط $\overline{OP}$ که

در جمله مثبت است یعنی جیب تمام مثبت یا منفی است بحسب آنکه زاویهٔ (xoy)
حاده یا منفرجه باشد و باین رمز نموده میشود $\cos(xoy) = \overline{OP}$ تلفظ میشود Cosinus(xoy)

۸ - در مثلث قائم الزاویه OPM بنا بر قضیهٔ فیثاغورس این رابطه حاصل
میشود $\overline{PM}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OM}^2$ پس در جمیع حالات هرچه باشد زاویهٔ (xoy)
(حاده یا منفرجه) چنین خواهیم داشت $\sin^2(xoy) + \cos^2(xoy) = 1$
ویا اگر بحض اختصار فرض کنیم $x = \widehat{xoy}$ دستور کلی باین صورت نوشته میشود
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ و از روی این رابطه اصلی میتوان یکی از دو مقدار
جیب وجیب تمام را بواسطهٔ معلوم بودن دیگری استخراج نمود

۹ - ظل زاویهٔ xoy عبارتست از خارج قسمت جبری جیبش بر جیب تمام
یعنی $\frac{\overline{PM}}{\overline{OP}}$ و بنا بر این ظل مثبت یا منفی است بحسب آنکه زاویهٔ (xoy)
حاده یا منفرجه باشد و چنین نموده میشود $tg(xoy) = \frac{\overline{PM}}{\overline{OP}} = \frac{\sin(xoy)}{\cos(xoy)}$
(تلفظ میشود tangente (xoy)

۱۰ - ظل تمام زاویهٔ xoy عبارتست از خارج قسمت جبری جیب تمامش بر
جیب یعنی $\frac{\overline{OP}}{\overline{PM}}$ بنا بر این ظل تمام مثبت یا منفی است بحسب آنکه زاویهٔ
(xoy) حاده یا منفرجه باشد و در جمیع حالات عکس ظل است و باین رمز نموده +

+ میشود $\cot g(xoy) = \frac{\overline{OP}}{\overline{PM}} = \frac{\cos(xoy)}{\sin(xoy)}$ و تلفظ میشود cotangente(xoy) [illegible]

بعضی از تألیفات مولف که بطبع رسیده

هندسه ابتدائی در دو جلد

هندسه متوسطه در دو جلد

جبر و مقابله در دو جلد

حل المسائل جبری

رسم برای سال اول و دوم متوسطه

نقشجات جغرافیائی در شش قطعه

مثلثات مستقیمة الخطوط در تحت طبع است

جغرافیای عالی ایران در تحت طبع است

حساب استدلالی در تحت طبع است